Szorzattá alakítás

http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/intel-skoool-tartalom-matematika/kozepiskola/algebrai-kifejezesek-szorzatta-alakitasa-i

Szorzattá alakító program

http://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=e7040eab64a24724666a4991fb077bd2

(itt a $3x^5 - 18x^4 + 27x^3$ kifejezés úgy vihető be, hogy 3x^5-18x^4+27x^3, és utána kiírja a szorzatalakját $3x^3(x-3)^2$ alakban.

$$\frac{6y-7}{6xy^2} - \frac{4x-3}{15x^2y} = \frac{6y-7}{6xy^2}\cdot\frac{5x}{5x} - \frac{4x-3}{15x^2y}\cdot\frac{2y}{2y}$$

$$= \frac{(5x)(6y-7)}{30x^2y^2} - \frac{(2y)(4x-3)}{30x^2y^2}$$

$$= \frac{(5x)(6y-7)-(2y)(4x-3)}{30x^2y^2}$$

$$= \frac{30xy-35x-8xy+6y}{30x^2y^2}$$

$$= \frac{22xy-35x+6y}{30x^2y^2}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+3)} + \frac{5}{(x+3)}$$

Not common denominators, to fix multiply $(x-1)$ to the numerator / denominator of

$$\frac{5}{(x+3)}\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)} = \frac{5x-5}{(x+3)(x-1)}$$

$$\frac{2x}{(x-1)(x+3)} + \frac{5x-5}{(x+3)(x-1)} \longleftarrow$$ Now we can add

$$= \frac{2x+5x-5}{(x-1)(x+3)} = \frac{7x-5}{(x-1)(x+3)}$$ Answer

Az algebrai törtekkel a következő műveleteket végezhetjük:

- Algebrai törtek **egyszerűsítésekor** a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítjuk (ha lehet), és a közös tényezőket (ha vannak) elhagyjuk, például $\frac{2x^2+2x}{xy+x}=\frac{2x\cdot(x+1)}{x\cdot(y+1)}=\frac{2\cdot(x+1)}{y+1}$. Nagyon fontos, hogy egyszerűsíteni csak szorzatalakban, szorzótényezővel szabad, tehát például $\frac{2x+3}{y+3}$-at nem „egyszerűsíthetjük" $\frac{2x}{y}$-ra (hiszen ez egy másik algebrai tört, amelynek helyettesítési értéke általában nem egyezik meg az eredeti tört helyettesítési értékével).

- Algebrai törtek **összevonásakor** a törteket **bővítéssel** közös nevezőre hozzuk, majd a számlálókat összevonjuk, például $\frac{x}{y}+\frac{y+x}{x+1}=\frac{x\cdot(x+1)}{y\cdot(x+1)}+\frac{y\cdot(y+x)}{y\cdot(x+1)}=\frac{x^2+x+y^2+xy}{y\cdot(x+1)}$.

- Algebrai törtek **szorzása** a törtek szorzásának megfelelően történik (a szorzat számlálója a számlálók szorzata, nevezője a nevezők szorzata lesz), például $\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{b^2}{a-b}=\frac{2ab^2}{(a+b)(a-b)}$. Természetesen szükség esetén egyszerűsíthetünk, például $\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x+1}=\frac{2xy}{y\cdot(x+1)}=\frac{2x}{x+1}$.

- Algebrai törtek **osztása** a törtek osztásának megfelelően történik (az osztó reciprokával szorzunk), például $\frac{c^2-d^2}{c^3}:\frac{c+d}{c}=\frac{c^2-d^2}{c^3}\cdot\frac{c}{c+d}=\frac{(c^2-d^2)\cdot c}{c^3\cdot(c+d)}$. Természetesen itt is egyszerűsíthetünk, az előző példában $\frac{(c^2-d^2)\cdot c}{c^3\cdot(c+d)}=\frac{(c+d)\cdot(c-d)\cdot c}{c^3\cdot(c+d)}=\frac{c-d}{c^2}$.

4. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{4a^2-4}{7a+7}$ **b)** $\dfrac{4c^3-4d^3}{8c^2-8d^2}$ **c)** $\dfrac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}$

Megoldás: Először a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítjuk, majd a közös szorzótényezőkkel egyszerűsítünk. Bár a feladat szövege nem kérdezett rá, megadjuk azt is, hogy az egyes kifejezések a változók mely értékeire nincsenek értelmezve (mert ekkor a törtek nevezője 0 lenne).

a) $\dfrac{4a^2-4}{7a+7}=\dfrac{4\cdot\left(a^2-1\right)}{7\cdot(a+1)}=\dfrac{4\cdot(a+1)\cdot(a-1)}{7\cdot(a+1)}=\dfrac{4\cdot(a-1)}{7}$, ahol $a\neq-1$.

b) $\dfrac{4c^3-4d^3}{8c^2-8d^2}=\dfrac{4\cdot(c-d)\cdot\left(c^2+cd+d^2\right)}{8\cdot(c+d)\cdot(c-d)}=\dfrac{c^2+cd+d^2}{2\cdot(c+d)}$. Az egyszerűsítés során bővül a kifejezés értelmezési tartománya, ugyanis az eredeti kifejezésben $c+d\neq0$ és $c-d\neq0$ (vagyis $c\neq\pm d$), míg az egyszerűsítés után már csak a $c+d\neq0$ feltétel (vagyis $c\neq-d$) marad meg. Viszont az átalakítás csak az eredeti értelmezési tartományon igaz, hiszen $c=d$ esetén csak az egyszerűsített kifejezést tudnánk értelmezni, az eredetit nem. Így az ilyen típusú feladatokban mindig az eredeti kifejezés értelmezési tartományát (pontosabban a meg nem engedett eseteket) fogjuk megadni.

c) $\dfrac{5x^2-5y^2}{10x^3+10y^3}=\dfrac{5\cdot(x+y)\cdot(x-y)}{10\cdot(x+y)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)}=\dfrac{x-y}{2\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)}$, ahol $x^3+y^3\neq0$, azaz $x\neq-y$.

5. Végezzük el a kijelölt műveleteket a változók lehetséges értékei mellett!

a) $\dfrac{3a+2}{2a+1}+\dfrac{1-4a}{4a-2}-\dfrac{2a^2}{4a^2-1}$ **b)** $\dfrac{e^2-ef}{e^2+ef}\cdot\dfrac{e^2f+ef^2}{ef}$ **c)** $\dfrac{x^2+xy}{x^2-xy}:\dfrac{5x^2-5y^2}{3x^3-3y^3}$

Megoldás: A szükséges összevonások, illetve a lehetséges egyszerűsítések céljából mindhárom esetben először szorzattá alakítjuk a kifejezések számlálóit és nevezőit (ahol ez lehetséges), majd ezekkel végezzük el a műveleteket.

a) $\dfrac{3a+2}{2a+1}+\dfrac{1-4a}{4a-2}-\dfrac{2a^2}{4a^2-1}=\dfrac{3a+2}{2a+1}+\dfrac{1-4a}{2\cdot(2a-1)}-\dfrac{2a^2}{(2a+1)\cdot(2a-1)}=$

$=\dfrac{(3a+2)\cdot(4a-2)+(1-4a)\cdot(2a+1)-2a^2\cdot2}{2\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)}=\dfrac{12a^2-6a+8a-4+2a+1-8a^2-4a-4a^2}{2\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)}=$

$=\dfrac{-3}{2\cdot(2a+1)\cdot(2a-1)}$, ahol $a\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{e^2-ef}{e^2+ef}\cdot\dfrac{e^2f+ef^2}{ef}=\dfrac{e\cdot(e-f)}{e\cdot(e+f)}\cdot\dfrac{ef\cdot(e+f)}{ef}=\dfrac{e-f}{e+f}\cdot(e+f)=e-f$, ahol $e\neq0$, $f\neq0$ és $e\neq-f$.

c) $\frac{x^2+xy}{x^2-xy}:\frac{5x^2-5y^2}{3x^3-3y^3}=\frac{x^2+xy}{x^2-xy}\cdot\frac{3x^3-3y^3}{5x^2-5y^2}=\frac{x\cdot(x+y)}{x\cdot(x-y)}\cdot\frac{3\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}{5\cdot(x+y)\cdot(x-y)}=$

$=\frac{x\cdot(x+y)\cdot 3\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)}{x\cdot(x-y)\cdot 5\cdot(x+y)\cdot(x-y)}=\frac{3\cdot(x^2+xy+y^2)}{5\cdot(x-y)}$, ahol $x\neq 0$, $x-y\neq 0$, $x+y\neq 0$ és $x^3-y^3\neq 0$, vagy összefoglalóan $x\neq 0$ és $x\neq \pm y$. (Az értelmezési tartomány vizsgálatakor az eredeti törtek nevezőiről, illetve az osztó számlálójáról kötöttük ki, hogy egyik sem lehet 0.)

Example 11

Simplify $\frac{6}{3x+3y}-\frac{x}{x^2-xy}$

Solution:

$$\frac{6}{3x+3y}-\frac{x}{x^2-xy}$$
$$=\frac{6}{3(x+y)}-\frac{x}{x(x-y)}$$
$$=\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}$$
$$=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{1(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{2x-2y-x-y}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x-3y}{(x+y)(x-y)}$$

Example 12

Simplify $\frac{9}{3x^2-3y^2}+\frac{x}{xy-x^2}$

Solution:

$$\frac{9}{3x^2-3y^2}+\frac{x}{xy-x^2}$$
$$=\frac{9}{3(x^2-y^2)}+\frac{x}{x(y-x)}$$
$$=\frac{3}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{y-x}$$
$$=\frac{3}{(x-y)(x+y)}-\frac{1}{x-y}$$
$$=\frac{3-1(x+y)}{(x-y)(x+y)}$$
$$=\frac{3-x-y}{(x-y)(x+y)}$$

Example: $\frac{2x-1}{4x-1}+\frac{x-2}{x+3}$. To add these fractions, the steps are:

1. Find the LCD, which is $(4x-1)(x+3)$.
2. Multiply the numerator and denominator of the first fraction by $(x+3)$ and the numerator and denominator of the second fraction by $(4x-1)$:

   $$\frac{(2x-1)}{(4x-1)}\cdot\frac{(x+3)}{(x+3)}+\frac{(x-2)}{(x+3)}\cdot\frac{(4x-1)}{(4x-1)}$$

3. The two fractions now both have the LCD as their denominator. Add the numerators and place the result over the LCD.

   $$\frac{(2x-1)(x+3)+(x-2)(4x-1)}{(4x-1)(x+3)}$$

4. Simplify by distributing the numerator.

   $$\frac{(2x^2+5x-3)+(4x^2-9x+2)}{(4x-1)(x+3)}$$
   $$=\frac{6x^2-4x-1}{(4x-1)(x+3)}$$

You must always factor the denominators. This is the only way to tell if a factor appears in more than one denominator.

Example: $\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x-3}$. To add these fractions, the steps are:

1. Factor the denominator of the first fraction. Then we can see that the factors $x-2$ and $x-3$ appear in more than one denominator:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

2. Find the LCD, which is $(x-2)(x-3)$.
3. Multiply the numerator and denominator of the second fraction by $(x-3)$ and the numerator and denominator of the third fraction by $(x-2)$:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)}+\frac{x-3}{(x-2)(x-3)}+\frac{3(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

4. The three fractions now both have the LCD as their denominator. Add the numerators and place the result over the LCD.

$$\frac{x+x-3+3(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

5. Simplify by distributing and adding like terms in the numerator.

$$\frac{5x-9}{(x-2)(x-3)}$$

To add or subtract fractions and non-fractions, convert the non-fractions into fractions with denominators of 1.

Example: $3x+\frac{1}{x-2}$. To add this fraction and non-fraction, the steps are:

1. Write the non-fraction as a fraction with a denominator of 1:

$$\frac{3x}{1}+\frac{1}{x-2}.$$

2. Find the LCD, which of course, is $(x-2)$.
3. Multiply the numerator and denominator of the first fraction by $(x-2)$:

$$\frac{3x(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}.$$

4. The two fractions now both have the LCD as their denominator. Add the numerators and place the result over the LCD.

$$\frac{3x(x-2)+1}{x-2}$$

5. Simplify by distributing and adding like terms in the numerator.

$$\frac{3x^2-6x+1}{x-2}$$

$$\frac{2}{x(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(x-3)} = \frac{2(x-3)+3x}{x(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{2x-6+3x}{x(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{5x-6}{x(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2x-(x-1)}{(x-1)x} = \frac{2x-x+1}{(x-1)x} = \frac{x+1}{(x-1)x}$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{6(x+1)-3(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{6x+6-3x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3x+9}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{3x-2(x-3)}{(x-3)x}$$

$$= \frac{3x-2x+6}{(x-3)x}$$

$$= \frac{x+6}{(x-3)x}$$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{1+2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1+2x+2}{(x+1)^2} = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$$

$$\frac{6}{x(x-1)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{6(x-2)+2(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{6x-12+2x-2}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{8x-14}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{4}{x^2-25} - \frac{3}{x^2-6x+5} = \frac{4}{(x+5)(x-5)} - \frac{3}{(x-5)(x-1)}$$

$$= \frac{4(x-1)-3(x+5)}{(x+5)(x-5)(x-1)}$$

$$= \frac{4x-4-3x-15}{(x+5)(x-5)(x-1)}$$

$$= \frac{x-19}{(x+5)(x-5)(x-1)}$$

$$\frac{1}{x^2-x} + \frac{2}{x} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{1+2(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1+2x-2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

$$\frac{2}{x+3} + \frac{12}{x^2-9} = \frac{2}{x+3} + \frac{12}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2(x-3)+12}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2x-6+12}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2x+6}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2}{x-3}$$

$$\frac{6}{x^2+5x+6} + \frac{2}{x^2-x-6} = \frac{6}{(x+2)(x+3)} + \frac{2}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{6(x-3)+2(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{6x-18+2x+6}{(x+2)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{8x-12}{(x+2)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{4(2x-3)}{(x+2)(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{9}{3x^2-3y^2}+\frac{x}{xy-x^2}$$ {Factorise the numerator and denominator}

$$=\frac{9}{3(x^2-y^2)}+\frac{x}{x(y-x)}$$ {Simplify fractions}

$$=\frac{3}{(x-y)(x+y)}+\frac{1}{y-x}$$ {Rewrite $y-x$ as $-(x-y)$}

$$=\frac{3}{(x-y)(x+y)}-\frac{1}{x-y}$$ {LCM = $(x-y)(x+y)$}

$$=\frac{3-1(x+y)}{(x-y)(x+y)}$$ {Subtract the numerators}

$$=\frac{3-x-y}{(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{6}{3x+3y}-\frac{x}{x^2-xy}$$ {Factorise the denominator}

$$=\frac{6}{3(x+y)}-\frac{x}{x(x-y)}$$ {Simplify fractions}

$$=\frac{2}{x+y}-\frac{1}{x-y}$$ {Lowest common denominator = $(x+y)(x-y)$}

$$=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}-\frac{1(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$ {Subtract the numerators}

$$=\frac{2x-2y-x-y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x-3y}{(x+y)(x-y)}$$

$$\begin{aligned}\frac{8}{x+1}-\frac{5}{x-4}&=\frac{8(x-4)}{(x+1)(x-4)}-\frac{5(x+1)}{(x+1)(x-4)}\\&=\frac{8x-32-(5x+5)}{(x+1)(x-4)}\\&=\frac{3x-37}{(x+1)(x-4)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{x+1}{x+2}&=\frac{(3x+2)(x+2)+(x+1)(2x+3)}{(2x+3)(x+2)}\\&=\frac{(3x^2+6x+2x+4)+(2x^2+3x+2x+3)}{(2x+3)(x+2)}\\&=\frac{5x^2+13x+7}{(2x+3)(x+2)}\end{aligned}$$

$$\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{(3x+2)(x+2)+(x+1)(2x+3)}{(2x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{(3x^2+6x+2x+4)+(2x^2+3x+2x+3)}{(2x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{5x^2+13x+7}{(2x+3)(x+2)}$$

$$\frac{x^2-x-20}{x^2+6x+8}\div\frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}$$

$$\frac{x^2-x-20}{x^2+6x+8}\bullet\frac{x^2+4x+4}{x^2-x-6}$$

$$\frac{(x+4)(x-5)}{(x+2)(x+4)}\bullet\frac{(x+2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$

$$\frac{(1)(x-5)}{(x+2)(1)}\bullet\frac{(x+2)(1)}{(x-3)(1)}$$

$$\frac{(x-5)}{(x+2)}\bullet\frac{(x+2)}{(x-3)}$$

$$\frac{5x+1}{x^2-2x-3}-\frac{5x-3}{x^2-x-6}=\frac{5x+1}{(x-3)(x+1)}-\frac{5x-3}{(x-3)(x+2)}=$$

$$=\frac{(5x+1)(x+2)}{(x-3)(x+1)(x+2)}-\frac{(5x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)(x+1)}=$$

$$=\frac{(5x+1)(x+2)-(5x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{(5x^2+10x+x+2)-(5x^2+5x-3x-3)}{(x-3)(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{5x^2+10x+x+2-5x^2-5x+3x+3}{(x-3)(x+1)(x+2)}=$$

$$=\frac{9x+5}{(x-3)(x+1)(x+2)}$$