EIGENSCHAFTEN ZUR CHARKTERISIERUNG VON FUNKTIONEN

DEFINITION DER FUNKTION: Gegeben seien zwei Mengen H und K. Sei jedem Element der Menge H eindeutig ein Element der Menge K zugeordnet, so heißt die Zuordnung Funktion. H ist der Definitionsbereich der Funktion und K ist die Bildmenge.

1. DEFINITIONSBEREICH

Die größte Menge, zu deren Elemente die Funktion ein Element der Bildmenge zuordnet. Bei Zahl-zu-Zahl-Funktionen ist der Definitionsbereich die Menge diejeniger x Elemente, die in der Funktionsgleichung ersetzt werden können. Im Koordinatensystem die Menge diejeniger x Elemente, zu den ein Funktionswert gehört.

Oft ist dieser Bereich schon vorgegeben - manchmal muss man den Definitionsbereich aber selbst bestimmen, d.h. entscheiden, welche x-Werte zugelassen werden und welche nicht.

Gesucht unter den x-Werten.

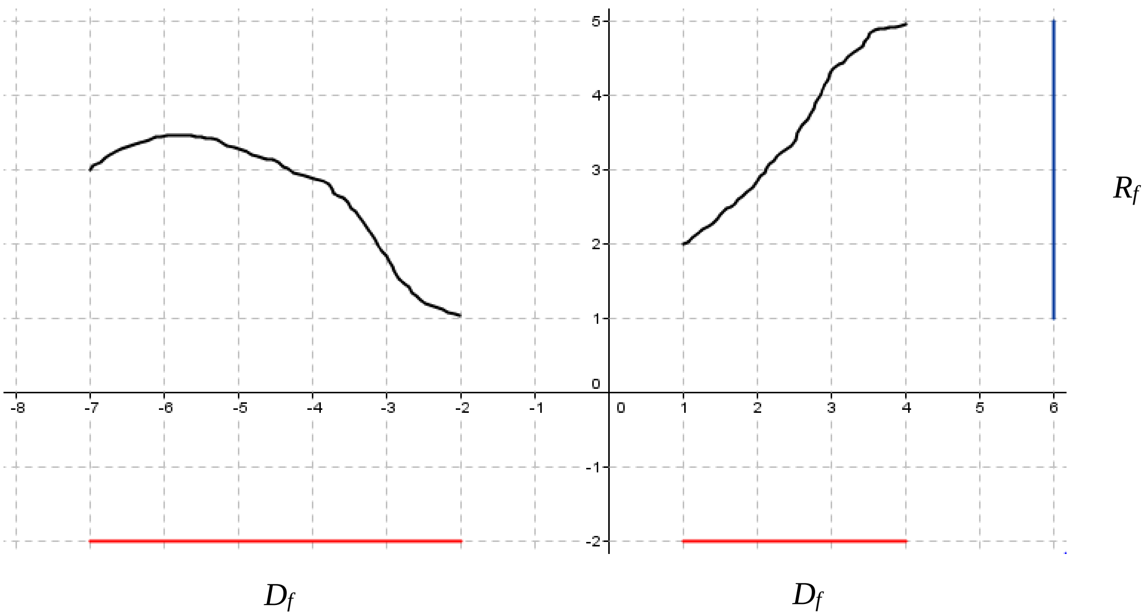
Bezeichnung: D_f (Domain)

2. WERTEMENGE

Diejenige Teilmenge der Bildmenge, deren Elemente zu den Elemente des Definitionsbereichs eindeutig zugeordnet werden. Anders gesagt die Menge aller Funktionswerten. Im Koordinatensystem die Menge von y-Werten, die von der Funktion aufgenommen werden.

Gesucht unter den y-Werten.

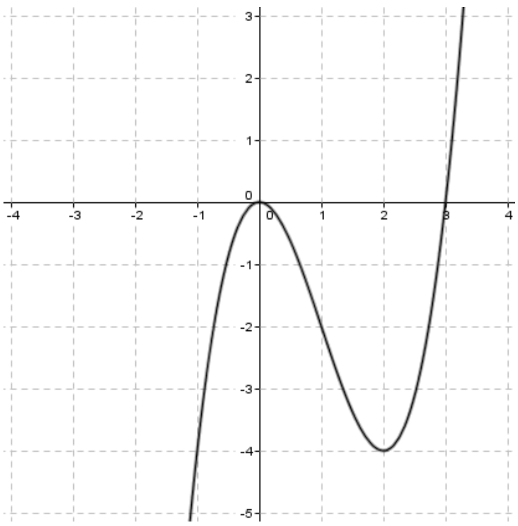
Bezeichnung: R_f (Range)



Definitionsbereich der in der Abbildung dargestellten Funktion:: $D_f = [-7; -2] \cup [1; 4]$, die Wertemenge: $R_f = [1; 5]$.

3. NULLSTELLE

Alle Elemente des Definitionsbereichs, zu den einen Funktionswert von 0 gehört. Den Funktionsgraph im Koordinatensystem dargestellt, diejenige x Werte, wo der Graph der Funktion die x-Achse schneidet oder berührt.

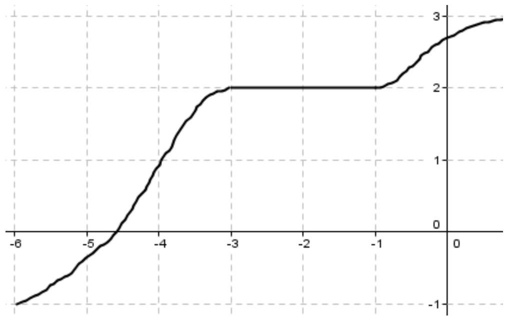


Die Nullstellen der in der Abbildung gezeigten Funktion sind $x = 0$ und $x = 3$.

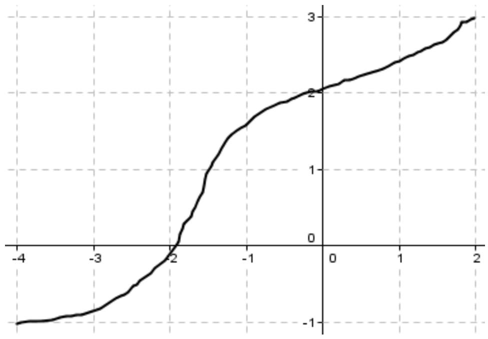
4. MONOTONIE

Man kann über Monotonie und strenge Monotonie sprechen.

Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Elemente des Intervalls.

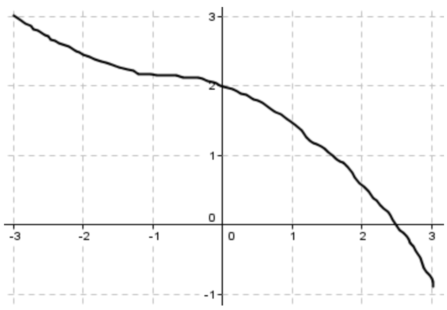


Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall streng monoton steigend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Elemente des Intervalls.



Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Elemente des Intervalls.

Eine Funktion $f(x)$ ist auf einem Intervall streng monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ Elemente des Intervalls.



5. EXTREMWERT

Die Extremwertstelle einer Funktion ist der Wert von x, bei dem der Funktionswert auf einem bestimmten Intervall oder im ganzen Definitionsbereich am größten oder am kleinsten ist.

Man spricht von einem lokalen Extremwert, wenn der gegebene Extremwert der größte oder kleinste in einer Teilmenge oder dem gesamten Definitionsbereich ist.

Von einem totalen oder globalen Extremwert spricht man, wenn der gegebene Extremwert der größte oder kleinste im gesamten Definitionsbereich ist.

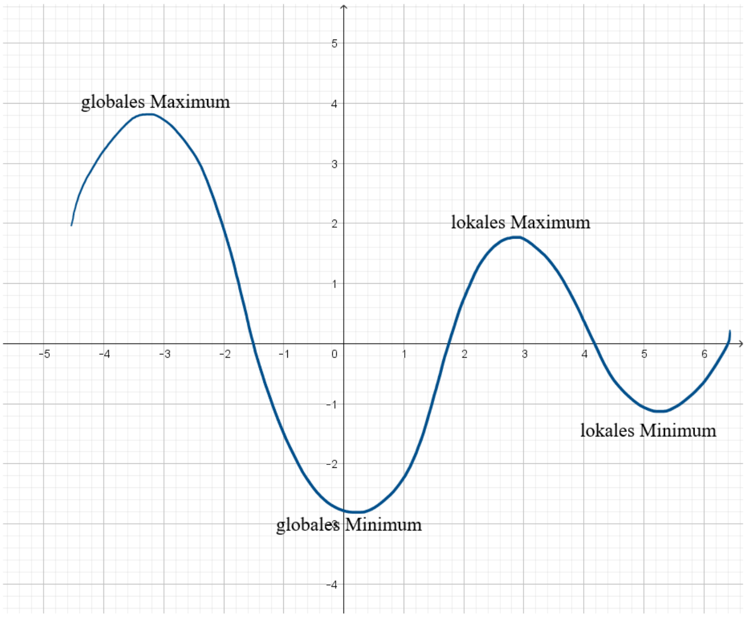
$f(x)$ hat lokales Maximum in x_0, wenn es eine Umgebung von x_0 gibt, in der für jedes x
$f(x) \geq f(x_0)$ gilt.

$f(x)$ hat lokales Minimum in x_0, wenn es eine Umgebung von x_0 gibt, in der für jedes x
$f(x) \leq f(x_0)$ gilt.

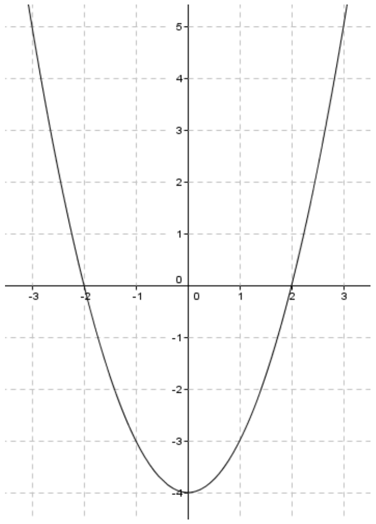
$f(x)$ hat globales Maximum in x_0, falls $f(x) \geq f(x_0)$ für alle x im Definitionsbereich.

$f(x)$ hat globales Minimum in x_0, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x im Definitionsbereich.

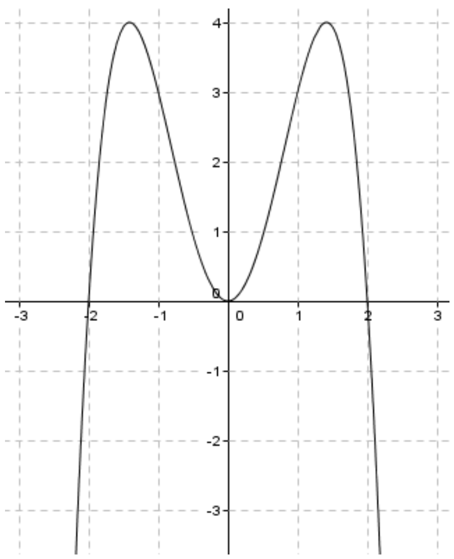
Eine Funktion $f(x)$ kann mehrere lokale Extremwerte haben. Alle totalen Extremwerte sind auch lokal, umgekehrt gilt es aber nicht sicher.



6. BESCHRÄNKTHEIT

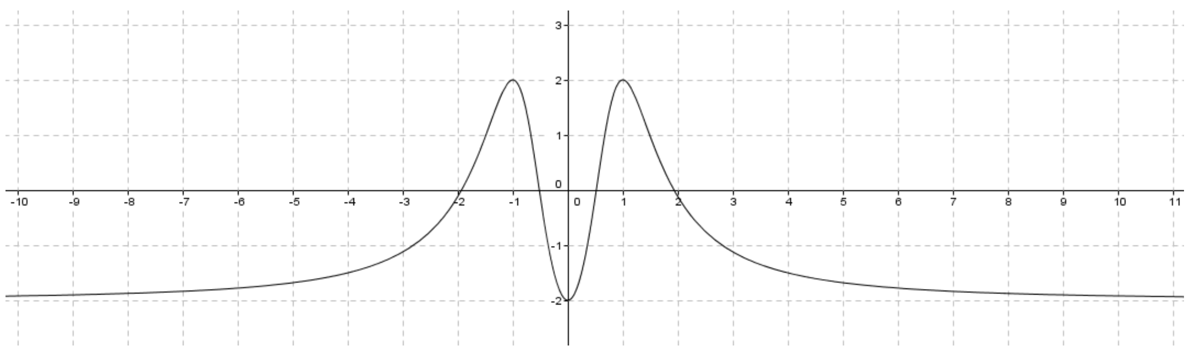


Eine Funktion $f(x)$ heißt man von unten beschränkt, falls es eine reelle Zahl k gibt, so daß $f(x) \geq k$ für jedes x im Definitionsbereich. Die größte untere Schranke der Funktion in der Abbildung ist $y = -4$.



Eine Funktion $f(x)$ heißt man von oben beschränkt, wenn es eine reelle Zahl K gibt mit $f(x) \leq K$ für jeden x im Definitionsbereich. Die kleinste obere Schranke der Funktion in der Abbildung ist $y = 4$.

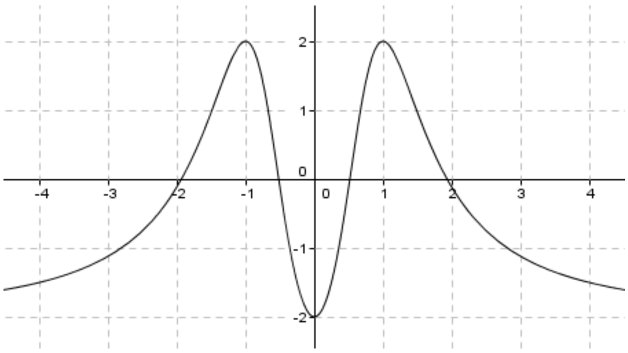
Eine Funktion $f(x)$ heißt beschränkt, wenn sie von unten und oben beschränkt ist. Die größte untere Schranke der Funktion in der Abbildung ist $y = -2$ und die kleinste obere Schranke ist $y = -2$.



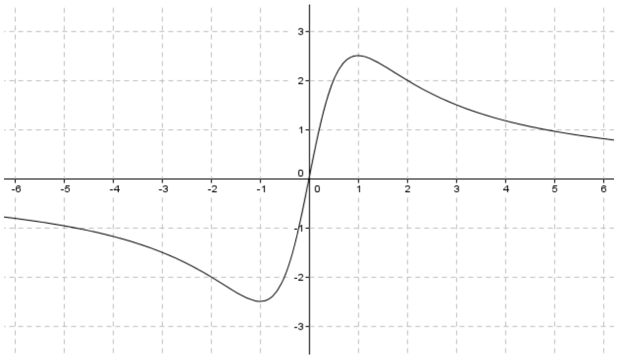
7. PARITÄT

Eine Funktion *f(x)* kann gerade, ungerade oder keine von ihnen sein.

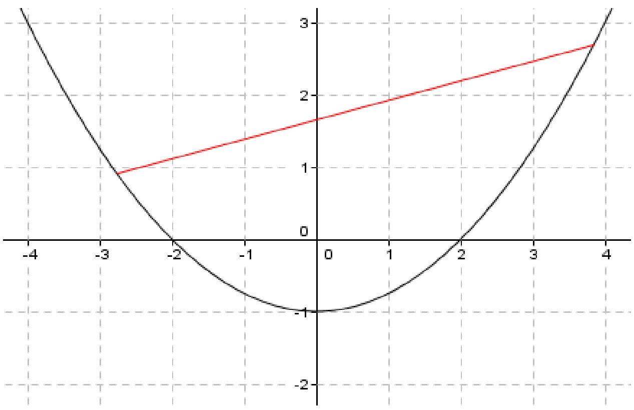
Eine Funktion *f(x)* nennt man gerade, wenn *f(−x)* = *f(x)* für jedes *x* im Definitionsbereich. Das bedeutet auch, dass der Graph der Funktion achsensymmetrisch zur *y*-Achse ist.



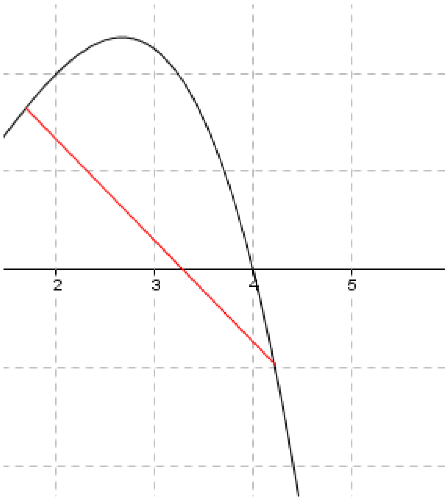
Eine Funktion *f(x)* heißt ungerade, falls *f(−x)* = −*f(x)* für jedes *x* im Definitionsbereich. In diesem Fall ist der Graph der Funktion zentralsymmetrisch zum Ursprung.



8. KONVEXITÄT

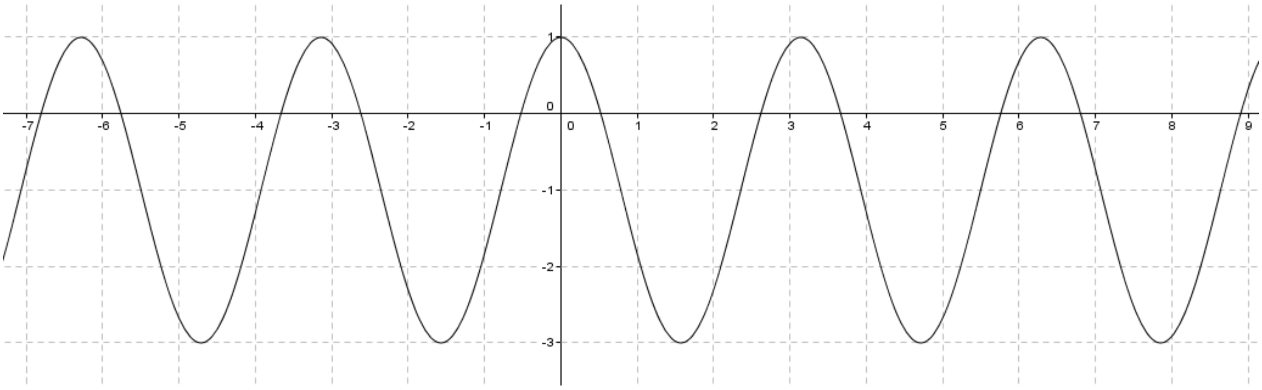


Eine Funktion *f(x)* ist auf einem Intervall konvex, wenn zwei beliebige Punkte des Graphen der Funktion innerhalb des Intervalls mit einer Strecke verbunden sind, befindet sich jeder Punkt dieser Strecke über dem Graphen der Funktion.



Eine Funktion *f(x)* ist auf einem Intervall konkav, wenn zwei beliebige Punkte des Graphen der Funktion innerhalb des Intervalls mit einer Strecke verbunden sind, befindet sich jeder Punkt dieser Strecke unter dem Graphen der Funktion.

Eine Funktion *f(x)* ist periodisch, wenn für jedes *x* im Definitionsbereich *f(x+p) = f(x)* gilt, also zu *x* + *p* den gleichen Funktionswert wie zu *x* geordnet wird. Mit anderen Worten, mit Verschieben des Graphen der Funktion um *p* in positive *x*-Richtung erhält man denselben Graphen. Der kleinste Wert von *p* - wenn es existiert - wird als Periode der Funktion *f(x)* bezeichnet.



Die Abbildungen wurden mit GeoGebra erzeugt.