

Geometrische Transformationen

<https://de.wikipedia.org/wiki/Kongruenzabbildung>

Definition: Die geometrischen Transformationen sind Funktionen (eindeutige Zuordnungen), die den Punkten Punkte zuordnen, sowohl ihr Definitionsbereich als auch ihr Wertemenge sind also Punktmenge.

Bei einer beliebigen Transformation, die dem Punkt P den Punkt P' zuordnet, wird P' das Bild von P genannt.

Das Bild einer Figur ist die Menge der zugeordneten Bildpunkte.

Kongruenzabbildungen

Definition: Kongruenzabbildungen (streckentreue Abbildungen) sind geometrische Transformationen, bei denen die Länge einer beliebigen Strecke gleich der Länge ihrer Bildstrecke ist.

Die Menge der ebenen Kongruenzabbildungen besteht aus

Spiegelungen, genauer den Punkt- und den senkrechten Achsenspiegelungen.

Drehungen,

(Parallel-) **Verschiebungen** (Translationen)

https://www.uni-miskolc.hu/~dephyma/mathe/material/Kongruenzabb.1_202-244.o.doc

Kongruenzabbildungen sind **geraden-, längen- und winkeltreu**. Sie bilden also Geraden auf Geraden ab und lassen Streckenlängen und Winkelgrößen unverändert.

<https://mathepedia.de/Kongruenzabbildungen.html>

Achsenspiegelung

Bild eines Punktes

Definition: Gegeben ist eine Gerade t der Ebene. Man ordne allen Punkten P der Ebene die Punkte P' folgendermaßen zu:

- ist $P \in t$, dann ist $P = P'$;
- ist $P \notin t$, dann ist P' ein Punkt der Ebene, für den erfüllt ist, dass die Gerade t die Mittelsenkrechte der Strecke PP' ist.

Die Gerade t ist die Achse der Spiegelung.

Die **Fixpunkte** einer Achsenspiegelung sind genau die Punkte von a .

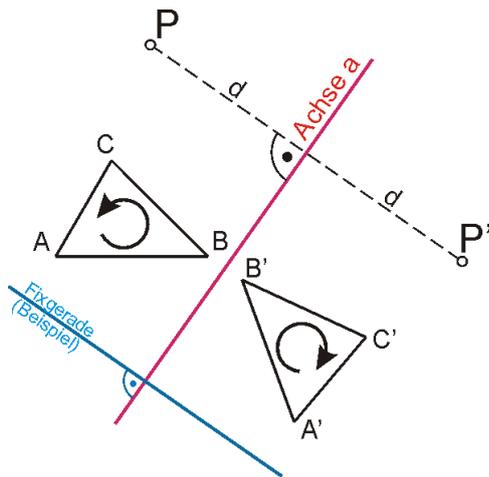


Bild von Geraden

Die **Achse** ist die **Fixfigur** der Achsenspiegelung.

Das Bild einer **Geraden, die senkrecht auf der Achse steht**, ist zu sich selbst, ihre Punkte sind aber nicht fix. Die auf der Achse senkrecht stehenden Geraden sind die **invarianten Figuren** der Achsenspiegelung.

Wenn die **Gerade auf der Achse nicht senkrecht ist**, dann ist die Achse die Winkelhalbierende des Winkels, den die Gerade und sein Bild einschließen.

Achsenspiegelung sind **geraden- und winkelstreu**.

In der Ebene ist zu beachten, dass durch eine Achsenspiegelung der **Umlaufsinn** eines Dreiecks geändert wird.

<https://mathepedia.de/Spiegelungen.html>

Achsensymmetrische Dreiecke:

gleichschenklige Dreiecke

Achsensymmetrische Vierecke

Sehnentrapeze (auf dem Mittelsenkrecht der Basen)

Deltoide (auf einer Diagonale)

Punktspiegelung

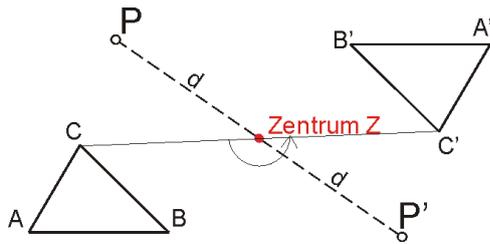


Bild eines Punktes

Definition:

Gegeben ist ein Punkt O der Ebene. Jedem Punkt P der Ebene ordne man den Punkt P' auf die folgende Weise zu:

- O wird sich selbst zugeordnet, also $O = O'$;
 - wenn $P \neq O$, dann ist P' ein Punkt der Eben, für den erfüllt ist, dass O der Mittelpunkt der Strecke PP' ist.
- O ist der Mittelpunkt (Zentrum) der Spiegelung.

Eine Punktspiegelung hat genau einen **Fixpunkt** (das heißt einen Punkt, den die Abbildung unverändert lässt), nämlich das Zentrum Z .

Bild von Geraden

Fixgeraden (genauer gesagt: invariante Geraden also die Geraden, die die Abbildung in sich selbst überführt) sind genau die Geraden durch Z .

Eine **beliebige Gerade** g (die geht nicht durch Z) wird auf eine zu g parallele Gerade (Bildgerade) g' abgebildet.

In der Ebene ist die Punktspiegelung am Zentrum Z gleichbedeutend mit einer Drehung um 180° bezüglich eines Drehzentrums Z .

Punktspiegelungen sind **geraden-, winkel- und orientierungstreu**.

<https://mathepedia.de/Spiegelungen.html>

Punktsymmetrische Dreiecke: es gibt keine

Punktsymmetrische Vierecke: Parallelogramme

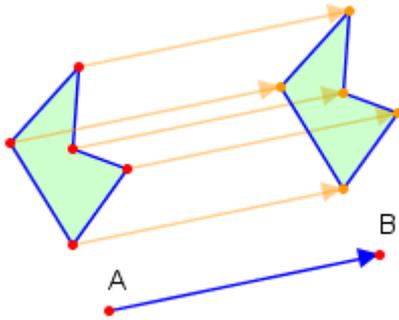
Parallelverschiebung

Bild eines Punktes

Definition:

Bild eines Punktes P ist der Punkt P' , auf den $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$ erfüllt. da \mathbf{v} ist der Verschiebungsvektor der Transformation.

Fixpunkte gibt es nicht, nur im Fall der Verschiebungsvektor der Nullvektor ist.



<https://mathepedia.de/Parallelverschiebungen.html>

Bild von Geraden

Invariant sind die Geraden, die mit dem Verschiebungsvektor parallel sind.

Sonst sind das Bild der Gerade und die ursprüngliche Gerade parallel.

Parallelverschiebungen sind **geraden-, winkel- und orientierungstreu.**

Es gibt keine Verschiebungssymmetrische Figuren.

Drehungen

Bild eines Punktes

Definition:

Unter einer Drehung versteht man in der Geometrie eine eindeutige Abbildung einer Figur auf eine andere mit folgender Eigenschaft: Es gibt einen Punkt Z , das so genannte Drehzentrum, und einen Winkel α , den so genannten Drehwinkel, so daß für alle Punkte P der Ausgangsfigur und ihr Bild P' der Zielfigur gilt:

- P und P' haben die gleiche Entfernung von Z
- Der Winkel PZP' ist gleich α

Fixpunkt ist das Zentrum.

Wenn der Drehwinkel 360° oder sein ganzzahliges Vielfaches ist, dann alle Punkte der Ebene sind fix.

Bild von Geraden

Das Bild einer Geraden und die ursprüngliche Gerade schließen einen Winkel von α ein. Ihre Abstand von dem Zentrum sind gleich.

Fix Geraden gibt es nur dann, wenn der Drehwinkel 360° oder sein ganzzahliges Vielfaches ist.

Invariante (aber nicht fix) Geraden sind die Geraden, die durch das Zentrum gehen und der Drehwinkel 180° oder sein ungerades Vielfaches ist.

In der Ebene sind eine Drehung mit dem Drehwinkel 180° und eine Punktspiegelung gleichbedeutend.

Drehungen sind **geraden-, winkel- und orientierungstreu**.

Drehsymmetrische Dreiecke: regelmäßige Dreiecke um ihrem Schwerpunkt mit 120° oder seinem ganzzahliges Vielfaches gedreht.

Drehsymmetrische Vierecke:

Parallelogramme um dem Schnittpunkt der Diagonalen mit 180° oder seinem ganzzahligen Vielfaches gedreht.

Quadrate um dem Schnittpunkt der Diagonalen mit 90° oder seinem ganzzahligen Vielfaches gedreht.

<https://mathepedia.de/Drehungen.html>