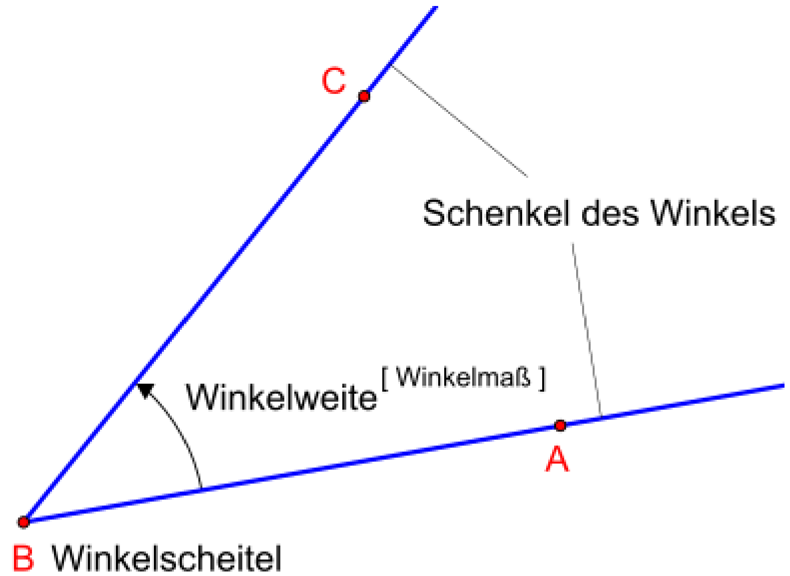
Einführung in die Geometrie

Inhalt

Winkel

https://de.wikipedia.org/wiki/Winkel

Ein **Winkel** ist in der Geometrie ein Teil der Ebene, der von zwei in der Ebene liegenden Strahlen (Halbgeraden) mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird.

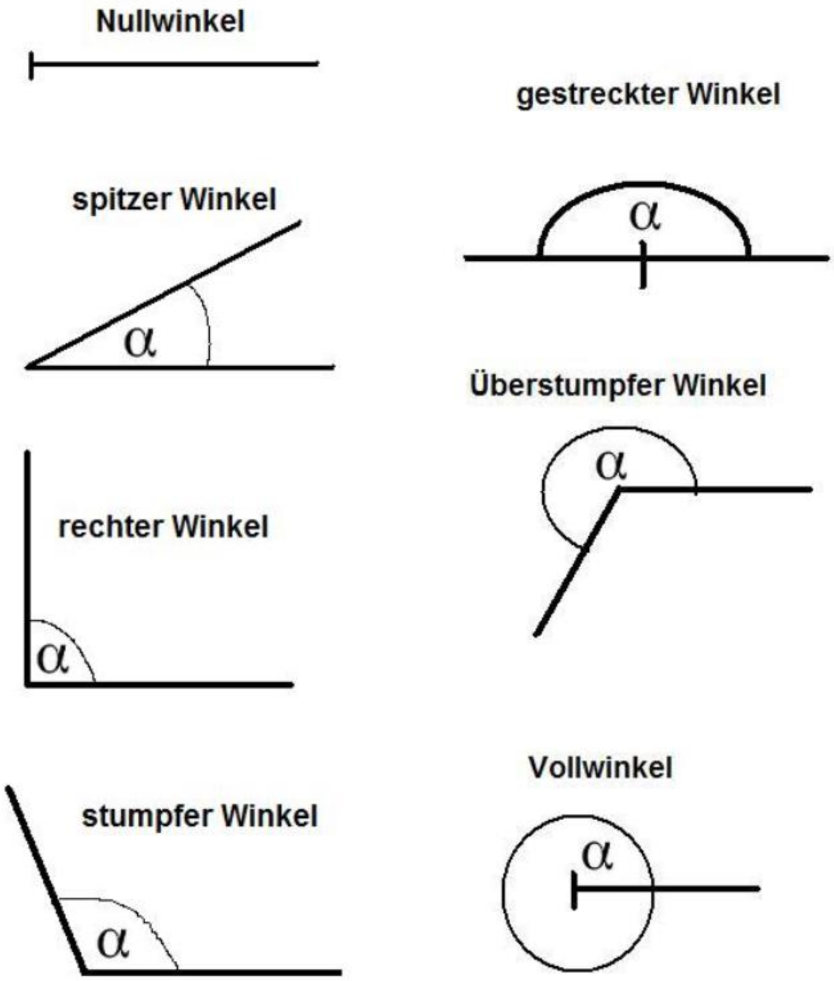


Der gemeinsame Anfangspunkt der beiden Strahlen wird *Scheitelpunkt* des Winkels, *Winkelscheitel* oder kurz *Scheitel* genannt; die Strahlen heißen *Schenkel des Winkels* oder *Winkelschenkel*. Ein Winkel kann durch drei Punkte festgelegt werden, von denen einer den Scheitel des Winkels bildet und die beiden anderen auf je einem Schenkel des Winkels liegen.

https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/winkeltypen-winkelarten.html

Winkeltypen

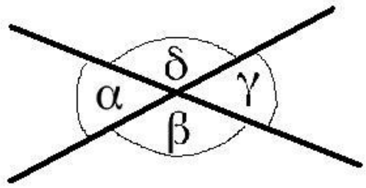
- Nullwinkel: $\alpha = 0°$
- Spitzer Winkel: $0° < \alpha < 90°$
- Rechter Winkel: $\alpha = 90°$
- Stumpfer Winkel: $90° < \alpha < 180°$
- Gestreckter Winkel: $\alpha = 180°$
- Überstumpfer Winkel: $180° < \alpha < 360°$
- Vollwinkel: $\alpha = 360°$



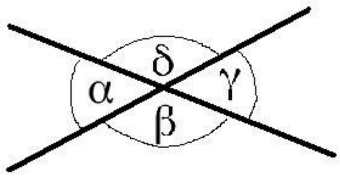
Spezielle Winkelpaare

Scheitelwinkel, Nebenwinkel, Stufenwinkel und Wechselwinkel

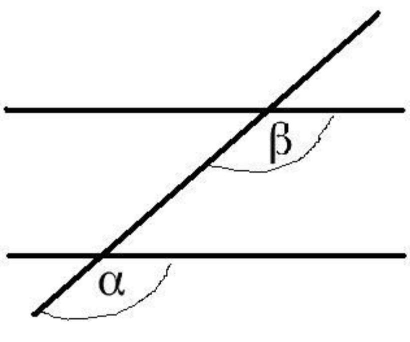
Der Scheitelwinkel: Schneiden sich zwei Geraden, so bezeichnet man das Paar gegenüberliegender Winkel als Scheitelwinkel oder Gegenwinkel. Scheitelwinkel sind immer gleich groß. In der folgenden Grafik sind die Winkel α und γ sowie β und δ Scheitelwinkel.



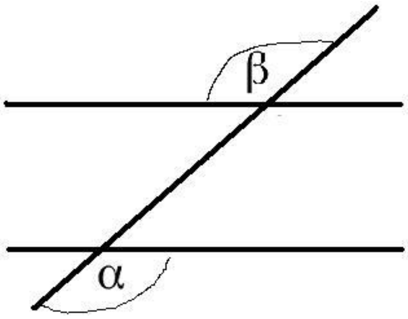
Der Nebenwinkel: In der Grafik kann man zu dem auch Nebenwinkel erkennen. Dabei bezeichnet man zwei nebeneinander liegende Winkel als Nebenwinkel. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180º. In der folgenden Grafik sind zum Beispiel α und β oder auch δ und γ Nebenwinkel. Ergänzen sich zwei Winkel zu 180°, so bezeichnet man dies als Supplementwinkel. Ergibt die Summe hingegen nur 90°, so heißen sie Komplementwinkel.



Der Stufenwinkel: Wir haben nun zwei parallele Geraden, die durch eine Gerade geschnitten wird. Dabei bildet sich ein Stufenwinkel aus. In der folgenden Grafik werden diese als α und β bezeichnet.



Der Wechselwinkel: Wir haben nun zwei parallele Geraden, die durch eine Gerade geschnitten wird. Dabei bildet sich ein Wechselwinkel aus. In der folgenden Grafik werden diese als α und β bezeichnet.

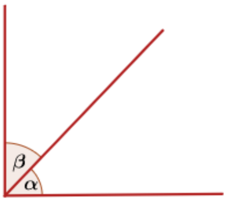


https://www.maths2mind.com/geometrie/geometrie-ebener-figuren-koerpern/geometrische-grundbegriffe/formeln/ergaenzungswinkel-winkelpaare

Komplementärwinkel

Komplementärwinkel sind 2 Winkel, die einander auf 90° ergänzen.

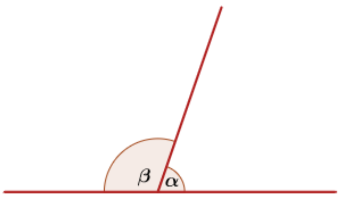
$\alpha + \beta = 90^\circ$



Supplementärwinkel

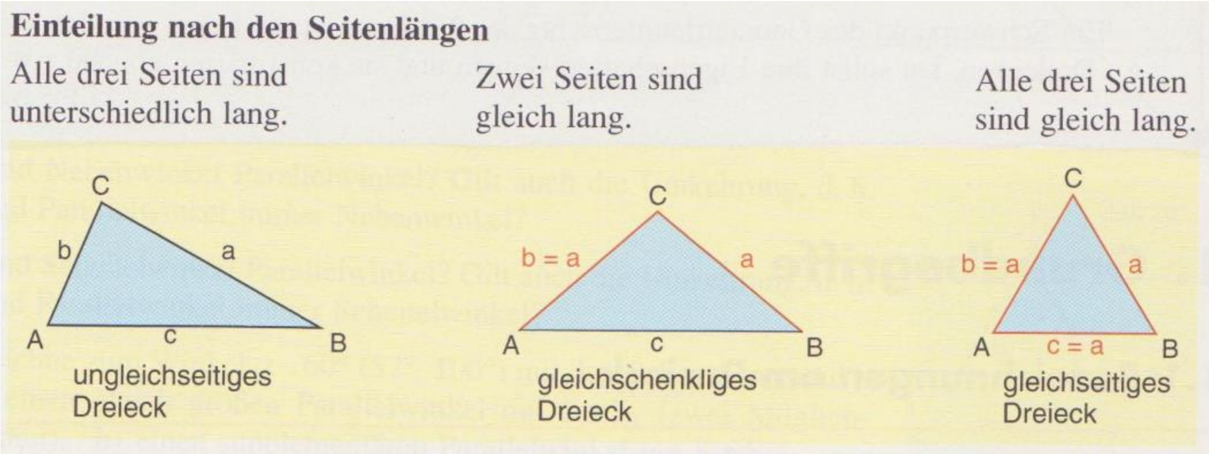
Supplementärwinkel sind 2 Winkel, die einander auf 180° ergänzen.

$\alpha + \beta = 180^\circ$



Dreiecksarten nach der Seiten

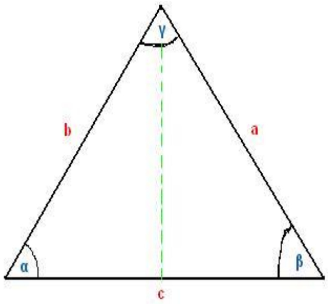
https://www.mathe-online.at/lernpfade/Dreiecke2d/?kapitel=1



https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/gleichschenkliges-dreieck.html

Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit folgenden Eigenschaften:

- Zwei gleichlange Seiten (a = b).
- Zwei gleichgroße Basiswinkel (α = β).
- Eine Achse (Symmetrielinie) halbiert die Basis und den Winkel γ an der Spitze.

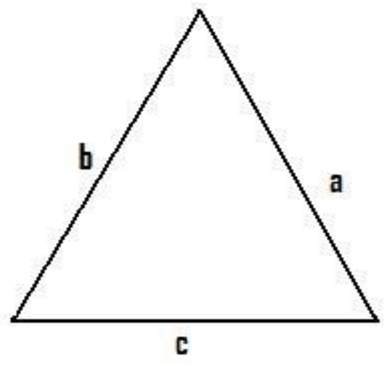


https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/gleichseitiges-dreieck.html

Ein gleichseitiges Dreieck hat die folgenden Eigenschaften:

- Drei gleichlange Seiten
- Drei Symmetrieachsen
- Drei Winkel mit 60°

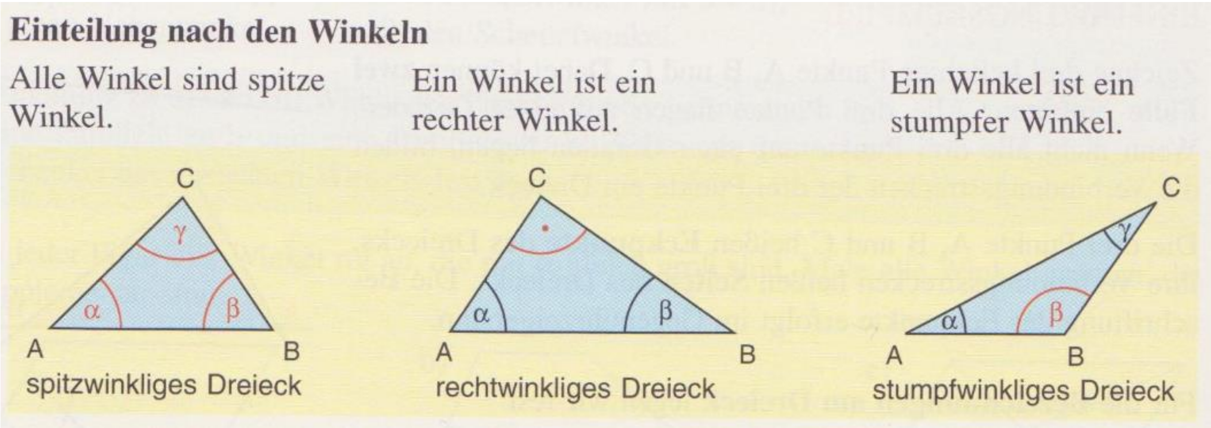
Ein gleichseitiges Dreieck ist zentrisch symmetrisch, da sich die drei Symmetrieachsen in einem Punkt, dem Höhenschnittpunkt, schneiden. Jede Symmetrieachse teilt das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.



Dreiecksarten nach der Winkel

https://www.mathe-online.at/lernpfade/Dreiecke2d/?kapitel=1

Spitzwinkliges Dreieck: In einem spitzwinkligen Dreieck sind alle **Winkel** kleiner als 90°.
Rechtwinkliges Dreieck: In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein **Winkel** genau 90°groß.
Stumpfwinkliges Dreieck: In einem stumpfwinkligen Dreieck ist ein **Winkel** größer als 90°.



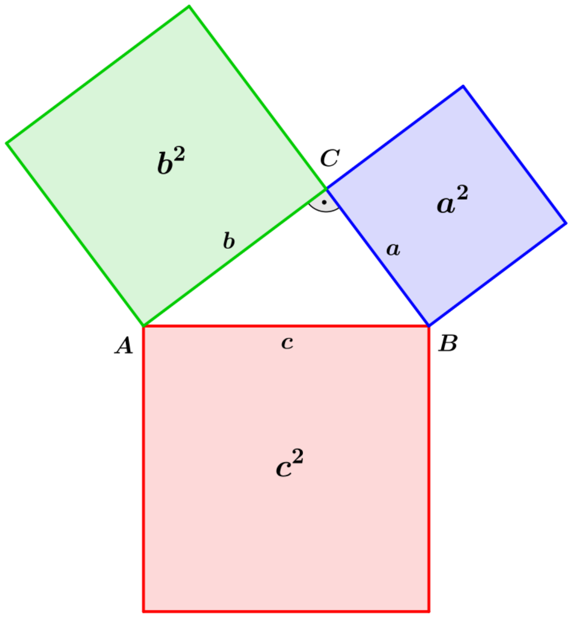
https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/satz-des-pythagoras-am-dreieck-mathematik.html

https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras

Satz des Pythagoras

Den Satz des Pythagoras kann man nur an Dreiecken anwenden, welche einen **rechten** Winkel aufweisen!

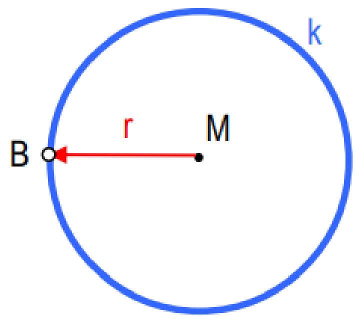
In einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Flächen der beiden Quadrate über den Katheten gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse.



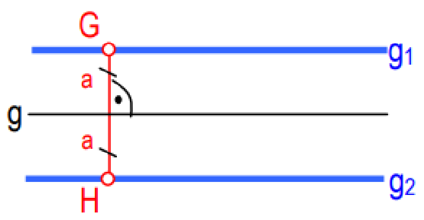
Punktmengen

http://www.andiraez.ch/schule/DossierPunktmengenundDreiecke.pdf

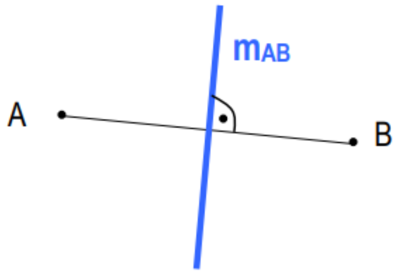
Der Kreis (k) ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt M (Kreismittelpunkt) die gleiche Entfernung haben (hier z.B. die Entfernung MB). Diese Entfernung nennen wir Radius (r)



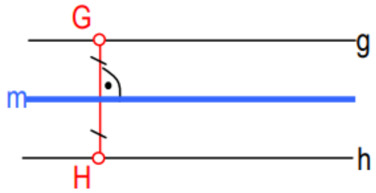
Das Parallelenpaar g1, g2 ist die Menge aller Punkte, die zu einer Geraden g den Abstand a haben.



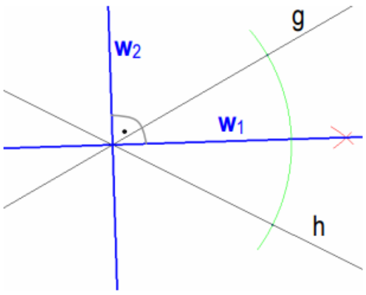
Die Menge aller Punkte, die von zwei Punkten A und B die gleiche Entfernung haben, ist die Mittelsenkrechte der Strecke AB.



Die Menge aller Punkte, die von zwei parallelen Geraden g und h den gleichen Abstand haben, heisst Mittelparallele m dieser beiden Geraden.



Die Menge aller Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h jeweils den gleichen Abstand haben, ist das Paar der Winkelhalbierenden w1, w2 der Winkel dieser Geraden.

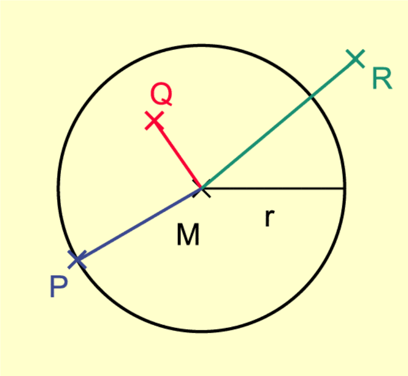


Kreis

https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/kreis

Der Kreis ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M der Ebene den gleichen Abstand r haben.
M heißt Mittelpunkt, und die Strecke der Länge r, die jeden Punkt des Kreises mit seinem Mittelpunkt verbindet, heißt Radius.
Nach dieser Definition ist der Kreis eine Linie, die Kreislinie. Der Mittelpunkt M gehört nach dieser Definition nicht zum Kreis.
Alle Randpunkte und alle inneren Punkte eines Kreises bilden gemeinsam die Fläche des Kreises, die Kreisfläche.
Aus dem Zusammenhang wird meist deutlich, ob mit dem Wort „Kreis“ die Kreislinie oder die Kreisfläche gemeint ist.

Ein Punkt heißt bezüglich eines Kreises mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r:
– innerer Punkt Q, wenn QM < r,
– Randpunkt P, wenn PM = r
– äußerer Punkt R, wenn RM > r



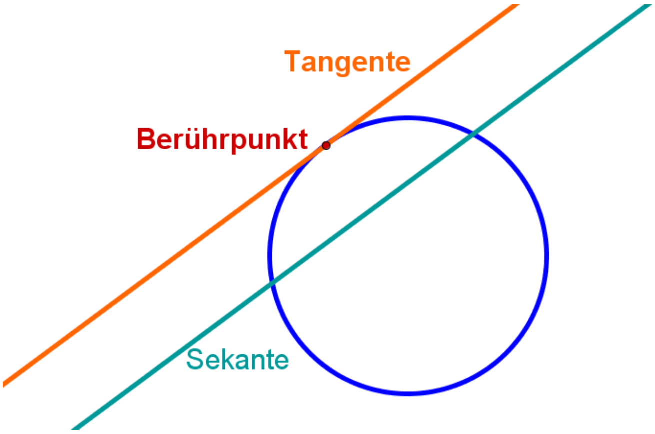
Durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte lässt sich stets genau ein Kreis zeichnen. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken der drei Punkte.

Jeder Kreis ist achsensymmetrisch. Jede Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises ist Symmetrieachse, somit besmittelitzt ein Kreis unendlich viele Symmetrieachsen.

Jeder Kreis ist punkt- und drehsymmetrisch mit seinem Mittelpunkt als Symmetrie- und Drehzentrum.

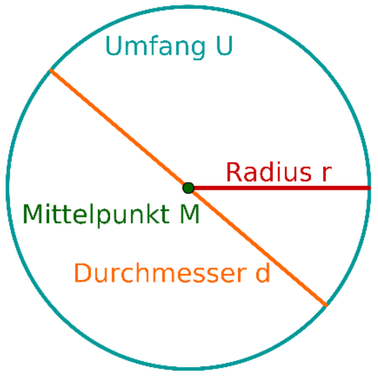
https://de.serlo.org/mathe/1647/tangente-an-kreis

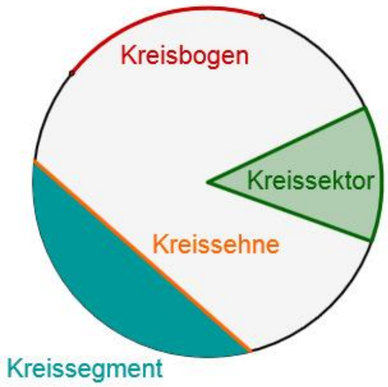
Eine **Kreistangente** ist eine Gerade, die den Kreis nur in einem Punkt, dem **Berührpunkt**, berührt. Eine Tangente schneidet im Gegensatz zu einer Sekante den Kreis nicht.



Die Kreistangente t*t* berührt den Kreis im Berührpunkt B*B*. Die Tangente steht immer senkrecht auf dem (im Berührpunkt gesteller) Radius des Kreises.

https://de.serlo.org/mathe/1338/kreise-und-kreisteile





Kreisbogen

Einen Abschnitt auf der Kreislinie nennt man **Kreisbogen** bzw. **Bogen**.

Kreissektor

Eine Teilfläche des Kreises, die von einem Kreisbogen und den daran angrenzenden Radien begrenzt wird, nennt man **Kreissektor** bzw. **Sektor**.

Kreissehne

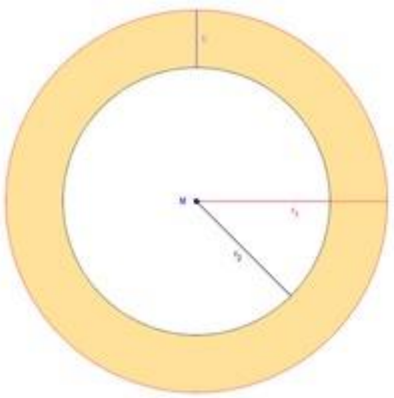
Eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Kreises nennt man **Kreissehne** bzw. **Sehne**.

Kreissegment

Eine Teilfläche des Kreises, die von der Kreislinie und einer Sehne begrenzt wird, nennt man **Kreissegment** bzw. **Segment**.

Ein Kreisring ist von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt. Konzentrische Kreise haben denselben Mittelpunkt, aber verschiedene Radien.

Ein Kreisring besteht aus zwei Kreisen, die denselben Mittelpunkt haben, deren Radien aber unterschiedlich groß sind. Solche Kreise bezeichnet man auch als **konzentrische Kreise**.

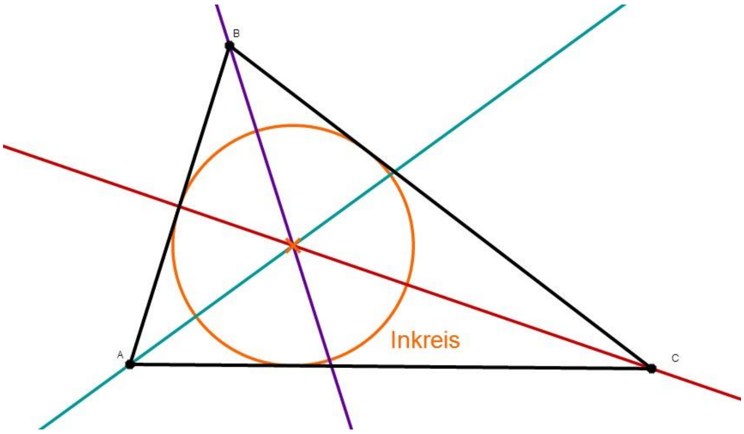


https://www.sofatutor.com/mathematik/videos/inkreis-und-umkreis-von-dreiecken-ueberblick

Besondere Punkte und Linien im Dreieck

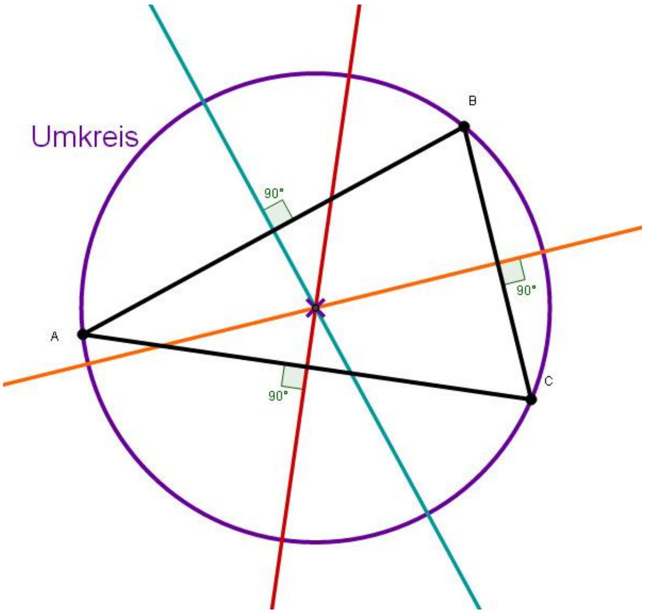
Inkreis eines Dreiecks

Der Inkreis berührt alle Seiten des Dreiecks genau einmal. Der Mittelpunkt eines Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Der Mittelpunkt eines Inkreises kann nur innerhalb des Dreiecks liegen.



Umkreis eines Kreises

Ein Kreis, der durch alle drei Eckpunkte verläuft, wird **Umkreis des Dreiecks** genannt. Der **Schnittpunkt** dieser drei Mittelsenkrechten ist der **Mittelpunkt des Umkreises**. Der Mittelpunkt des Umkreises liegt von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt.



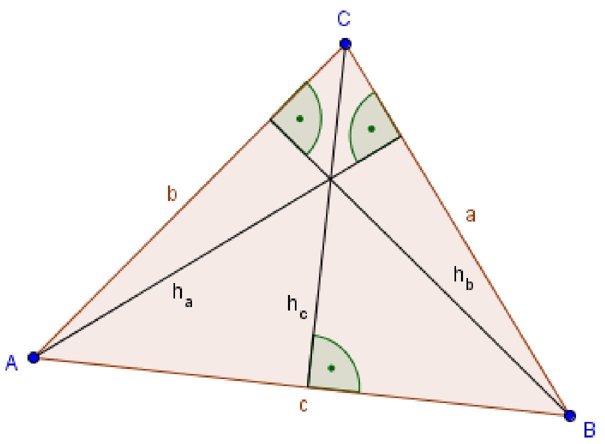
Höhenlinien

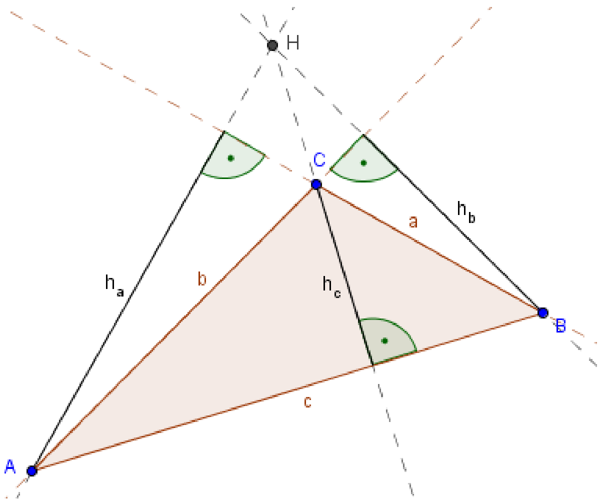
https://www.mathe-lerntipps.de/hoehe-eines-dreiecks/

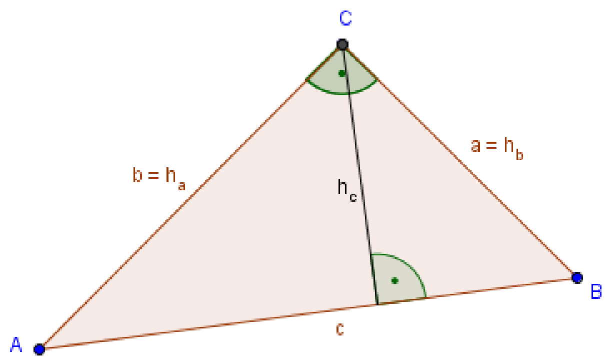
Es gibt drei Höhenlinien in einem Dreieck. Sie stehen senkrecht auf die entsprechende Seite.

Die Höhe h_a steht senkrecht auf der Seite a und verläuft durch den Eckpunkt A.

Die Höhenlinien schneiden einander im gleichen Punkt, im s.g. Höhenschnittpunkt.



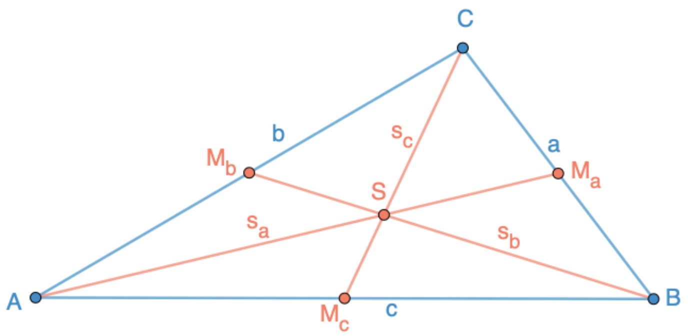




Seitenhalbierenden

https://www.studysmarter.de/schule/mathe/geometrie/seitenhalbierende-dreieck/

Seitenhalbierenden sind **Strecken**, die **von einem Eckpunkt des Dreiecks zur Seitenmitte der gegenüberliegenden Dreiecksseite** verlaufen. Jedes Dreieck hat somit drei Seitenhalbierende.



Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in genau einem Punkt. Dieser Punkt wird als Punkt S oder auch als **Schwerpunkt** des Dreiecks bezeichnet.

Am Schwerpunkt des Dreiecks werden die Seitenhalbierenden jeweils – ausgehend vom dazugehörigen Eckpunkt des Dreiecks – im Verhältnis 2:1 geteilt. Die längere Strecke liegt näher zum Eckpunkt.

Mittellinien

https://www.mathe-lerntipps.de/mittellinien/

Verbindet man die Mittelpunkte aller Seiten eines Dreiecks, erhält man die sogenannten **Mittellinien** – hier rot dargestellt.

Die Mittellinien sind alle parallel zu ihrer jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseite. Außerdem ist jede Mittellinie halb so lang wie ihre parallele Dreiecksseite. Weiterhin teilen die Mittellinien das Dreieck in vier kleinere Dreicke, die alle kongruent sind.

Satz des Thales

https://de.bettermarks.com/mathe/satz-des-thales/

Wenn der Punkt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB liegt, dann hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.

Die Dreiecke AMC und CMB sind gleichschenklig mit dem Radius als Schenkellänge.

Da in einem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich groß sind, gilt:

$\gamma_1 = \alpha$ und $\gamma_2 = \beta$

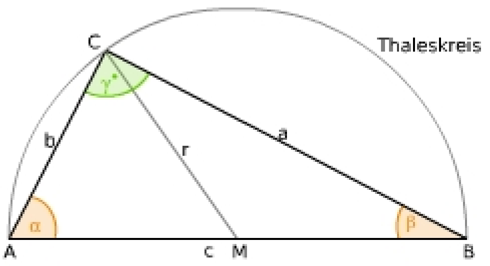
und damit:

$\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$

Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck gilt außerdem:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Mit $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ ergibt sich:

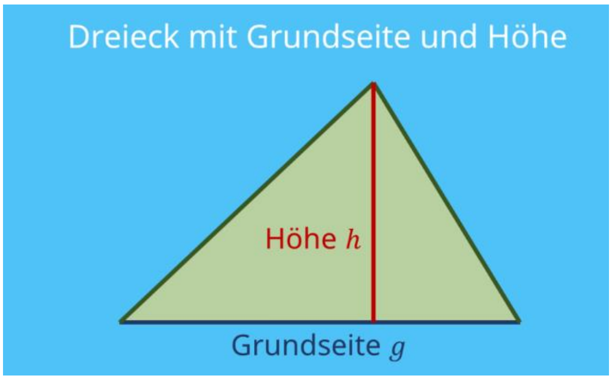


https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Thales#Formulierung_des_Satzes_und_seiner_Umkehrung

Auch die Umkehrung des Satzes ist korrekt: Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt immer in der Mitte der Hypotenuse.

Flächeninhalt des Dreiecks

https://studyflix.de/mathematik/flaecheninhalt-dreieck-2531



Flächeninhalt des dreiecks

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$