Kijelentéslogika, ítéletkalkulus

Kijelentés, ítélet: olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis

Logikai értékek: igaz, hamis

Szürke I: 52-53, 61-62, 88, 95

Logikai műveletek

1. Negáció

$\neg A$: hamis, ha A igaz és igaz, ha A hamis
$\neg i = h \, \textit{és} \, \neg h = i$
$\neg(\neg A) = A$

Állítás	Tagadása
A 2 páros szám. (igaz)	A 2 nem páros szám. (hamis)
Az 5 nagyobb, mint 7. (hamis)	Az 5 nem nagyobb, mint 7. (igaz)
Minden négyzet téglalap. (igaz)	Van olyan négyzet, amely nem téglalap. (hamis)
Minden prímszám páratlan. (hamis)	Van olyan prímszám, amely nem páratlan. (igaz)
Van olyan paralelogramma, amely rombusz. (igaz)	Nincs olyan paralelogramma, amely rombusz. VAGY Egyik paralelogramma sem rombusz. VAGY Minden paralelogramma nem rombusz. (hamis)
Van olyan természetes szám, amely nem egész. (hamis)	Minden természetes szám egész. (igaz)
Van olyan háromszög, amely szabályos. (igaz)	Nincs olyan háromszög, amely szabályos. VAGY Minden háromszög nem szabályos. (hamis)
Nincs olyan függvény, amely páratlan. (hamis)	Van olyan függvény, amely páratlan. (igaz)
Nincs olyan szám, amely nem prím. (hamis)	Van olyan szám, amely nem prím.
Ha egy négyszög téglalap, akkor rombusz. (hamis)	„Ha egy négyszög téglalap, akkor nem biztos, hogy rombusz.” Pontosabban: Van olyan téglalap, amely nem rombusz. (igaz)
Ha egy szám 0-ra végződik, akkor páros. (igaz)	„Ha egy szám 0-ra végződik, akkor nem biztos, hogy páros.” Pontosabban: Van olyan szám, amely 0-ra végződik, de nem páros. (hamis)
Ha egy szám páros, akkor nem egész. (hamis)	„Ha egy szám páros, akkor még lehet egész.” Pontosabban: Van olyan páros szám, amely egész. (igaz)

Ha egy négyszög nem trapéz, akkor nem rombusz. (igaz)	„Ha egy négyszög nem trapéz, akkor még lehet rombusz.” Pontosabban: Van olyan négyszög, amely nem trapéz és rombusz. (hamis)

A	$\neg A$
I	H
H	I

Ha egy tétel igaz, akkor tagadása hamis, és fordítva.

TK12: 21/2-3
Érettségi összefoglaló feladatgyűjtemény II: 2980-2982

2. Konjunkció (és)

$A \wedge B$: pontosan akkor igaz, ha A és B is igaz, különben hamis.
$A \wedge \neg A = h, A \wedge A = A, A \wedge i = A, A \wedge h = h$
$A \wedge B = B \wedge A, A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$

***A* állítás**	***B* állítás**	**$A \wedge B$**
Béla fiú (**IGAZ**)	Az ég kék (**IGAZ**)	Béla fiú és az ég kék (**IGAZ**)
Béla fiú (**IGAZ**)	Az ég nem kék (**HAMIS**)	Béla fiú és az ég nem kék (**HAMIS**)
Béla nem fiú (**HAMIS**)	Az ég kék (**IGAZ**)	Béla nem fiú és az ég kék (**HAMIS**)
Béla nem fiú (**HAMIS**)	Az ég nem kék (**HAMIS**)	Béla nem fiú és az ég nem kék (**HAMIS**)

A	***B***	**$A \wedge B$**
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H

TK12: 21/6

3. Diszjunkció (vagy)

$A \vee B:$ pontosan akkor hamis, ha A és B is hamis, különben igaz.
$A \vee \neg A = i$, $A \vee A = A$, $A \vee i = i$, $A \vee h = A$
$A \vee B = B \vee A$, $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$

***A* állítás**	***B* állítás**	$\boldsymbol{A \vee B}$
Béla fiú (**IGAZ**)	Az ég kék (**IGAZ**)	Béla fiú vagy az ég kék (**IGAZ**)
Béla fiú (**IGAZ**)	Az ég nem kék (**HAMIS**)	Béla fiú vagy az ég nem kék (**IGAZ**)
Béla nem fiú (**HAMIS**)	Az ég kék (igaz)	Béla nem fiú vagy az ég kék (**IGAZ**)
Béla nem fiú (**HAMIS**)	Az ég nem kék (**HAMIS**)	Béla nem fiú vagy az ég nem kék (**HAMIS**)

A	***B***	$\boldsymbol{A \vee B}$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

A logikai „vagy” különbözik a hétköznapokban használatos „vagy” kötőszótól, ahol kizáró értelemben használjuk. Például: Ennék egy pacalt vagy egy szalontüdőt. Ezt úgy értjük, hogy a kettő közül valamelyiket, de nem mindkettőt. A logikában ezzel szemben akkor is igaznak tekintjük, ha mindkettőt elfogyasztjuk.

TK12: 21/7

A konjunkcióra és a diszjunkcióra vonatkozó közös azonosságok:

Disztributivitás:

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge B)$
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee B)$

de Morgan-féle azonosságok:

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

TK12: 22/8-9
Szürke I./96-97, 101, 103

4. Implikáció („maga után vonja”)

$A \Rightarrow B:$ pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, egyébként igaz.

Pl:

Ha egy szám osztható nyolccal, akkor ez a szám osztható néggyel. (igaz)
Ha egy szám osztható nyolccal, akkor ez a szám nem osztható néggyel. (hamis)
Ha egy szám nem osztható nyolccal, akkor ez a szám osztható néggyel. (lehet igaz, pl a 12 esetén)
Ha egy szám nem osztható nyolccal, akkor ez a szám nem osztható néggyel. (lehet igaz, pl a 6 esetén)

VAGY

Ha igaz, hogy: Ha megkapom az ösztöndíjam, akkor elviszem Julit moziba;

Ebben az esetben az az állítás, hogy

Ha megkapom az ösztöndíjam, akkor nem viszem el Julit moziba – hamis;
Ha nem kapom meg az ösztöndíjam, akkor elviszem Julit moziba és a
Ha nem kapom meg az ösztöndíjam, akkor nem viszem el Julit moziba állítások egyikéről sem tudjuk, hogy igaz-e.

A matematikai logika az utóbbi mindkét állítást igaznak tekinti.

$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$

Az implikáció művelete:

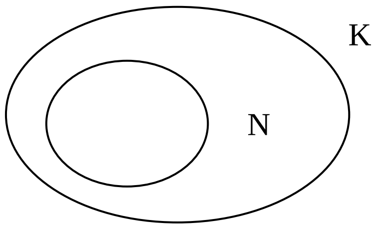
- nem kommutatív, azaz egy tétel megfordítása nem mindig igaz
- nem asszociatív

A	B	$A \Rightarrow B$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Elegendő feltételek:

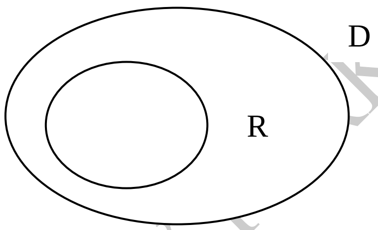
Egy állításból csak akkor következik egy másik, ha az előző annak elegendő feltétele. Ez a feltétel lehet szükséges és nem szükséges is.

Pl. Ha egy szám osztható 4-gyel (N), akkor osztható 2-vel is (K). Ez elegendő feltétel, tehát az állítás igaz. De nem szükséges, hiszen a 2-vel való oszthatósághoz nem szükséges, hogy osztható legyen 4-gyel (pl. a 6 nem osztható 4-gyel, mégis osztható 2-vel).



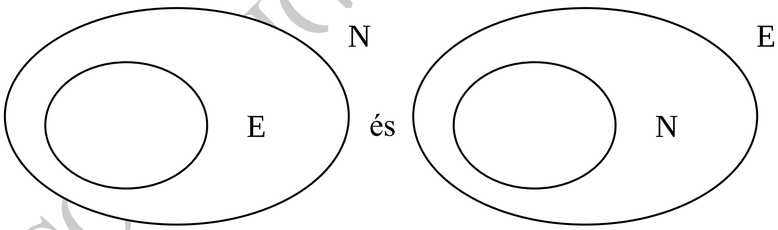
Tehát N elegendő, de nem szükséges feltétele K-nak. $N \Rightarrow K, \text{de}\, K \not\Rightarrow N$

Ha egy négyszög rombusz (R), akkor deltoid is (D). Igaz, mert elegendő a feltétel. A feltétel azonban nem szükséges, hiszen ahhoz hogy egy négyszög deltoid legyen nem szükséges rombusznak lennie.



Tehát R elegendő, de nem szükséges feltétele D-nek. $R \Rightarrow D, \text{de}\, D \not\Rightarrow R$

Ha egy négyszög oldalai és szögei is egyenlők (E), akkor az négyzet (N).
A feltétel elegendő, és szükséges is.



$E \Rightarrow N, \text{és}\, N \Rightarrow E$ így
$E \Leftrightarrow N$

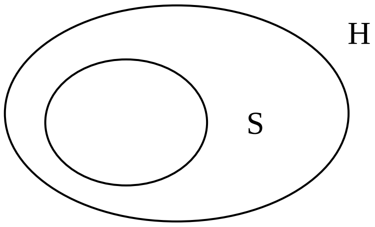
Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal (K), akkor osztható 6-tal is (H).
Ez is szükséges és elegendő feltétel. $K \Rightarrow H, \text{és}\, H \Rightarrow K$ így $K \Leftrightarrow H$.

Általánosan: ha *A* elegendő feltétele *B*-nek, akkor $akkor\, A \Rightarrow B$.

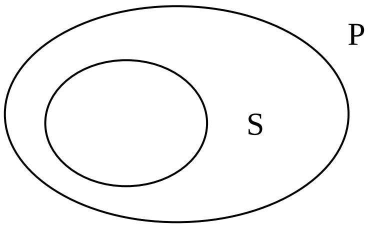
Szükséges feltételek:

Az önmagában szükséges feltételből még nem következik egy állítás, hiszen ahhoz elegendőnek is kell lennie.

Ha egy háromszögnek van 60º-os szöge (H), akkor az szabályos (S). Ez szükséges, de nem elegendő feltétel, így hamis a következtetés. $H \not\Rightarrow S$, habár $S \Rightarrow H$.

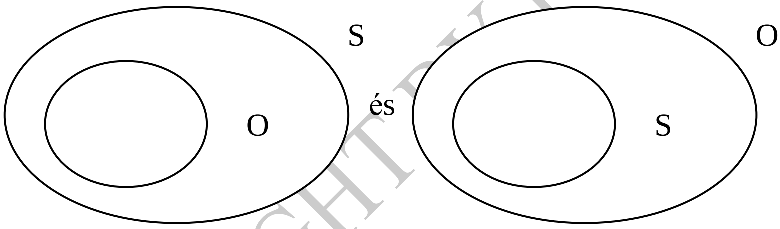


Ha egy függvény periodikus (P), akkor az a sinus függvény (S). Ez szintén szükséges, de nem elegendő feltétel, így hamis a következtetés. $P \not\Rightarrow S$, habár $S \Rightarrow P$.



Ha egy háromszög minden oldala egyenlő (O), akkor minden szöge is egyenlő (S). Ez szükséges és elegendő feltétel, így igaz az állítás

.



$O \Rightarrow S$, és $S \Rightarrow O$, így
$O \Leftrightarrow S$

A fentiek alapján látszik, hogy a szükséges feltétel mindig következik az elégségesből. Az elegendő azonban csak akkor, ha szükséges is.
Tehát: ha *B* szükséges feltétele *A*-nak, akkor $akkor\ A \Rightarrow B$.

Következtetési szabályok:

$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ (*modus ponens*)
$((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$ (*modus tollendo ponens*)
$((\neg B \Rightarrow \neg A) \wedge A) \Rightarrow B$ (*indirekt*)

Az indirekt bizonyítás:

a) általában tételek megfordításának igazolására (pl: Pithagorasz tétele, Thálész tétele, húrnégyszögek és érintőnégyszögek tétele)

b) $A \Rightarrow B$-t szeretnénk igazolni. Indirekt feltevés: *A* igaz, de *B* nem, azaz $A \wedge \neg B$. Ha erről bebizonyosodik, hogy hamis, azaz $A \wedge \neg B = h$, akkor ennek tagadása igaz, tehát $\neg(A \wedge \neg B) = i$. A de Morgan-féle azonosság és az implikáció másik felírása alapján: $\neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B \equiv A \Rightarrow B$. Tehát ha $\neg(A \wedge \neg B) = i$, akkor $A \Rightarrow B = i$ is teljesül, vagyis az eredeti állítás igaz.

c) $\neg B \Rightarrow \neg A, akkor\ A \Rightarrow B$

Következtetési hibák:

$(A \Rightarrow B \wedge B) \Rightarrow A$

$(A \Rightarrow B \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$

5. Ekvivalencia ("akkor és csakis akkor", "szükséges és elegendő")

$A \Leftrightarrow B$:pontosan akkor igaz, ha *A* és *B* logikai értéke megegyezik, egyébként hamis.

$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$A \Leftrightarrow A = i, A \Leftrightarrow í = A, A \Leftrightarrow h = \neg A$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
I	I	I	I	I
I	H	H	I	H
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

Tételek megfordíthatósága.

Egy tételt akkor nevezünk megfordíthatónak, ha a tétel és megfordítása is igaz.

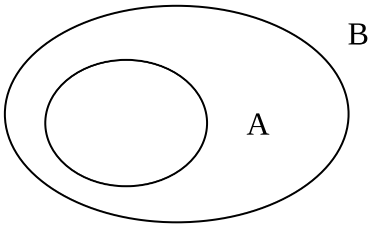
Vagyis $A \Rightarrow B = I\ és\ B \Rightarrow A = I,\ így\ A \Leftrightarrow B = I$, tehát *A* és *B* egymásból következnek, vagyis egyenértékű, **ekvivalens** állítások.

A és *B* csak akkor ekvivalensek, ha egymásnak **szükséges és elegendő feltétel**ei. Hiszen, ha *A* elegendő feltétele *B*-nek, akkor $A \Rightarrow B$, és ha *A* szükséges feltétele *B*-nek, akkor $B \Rightarrow A$.

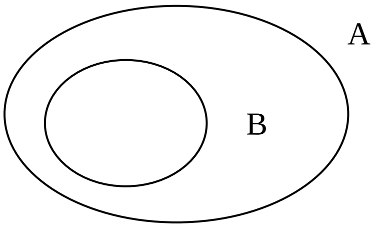
Másképpen: mindegyik állítás elegendő feltétele a másiknak. De szükséges is, hiszen következik a másikból, ez pedig azt jelenti, hogy mindig teljesül, ha a másik teljesül.

Pl. Ha egy négyszög szögei és oldalai is egyenlők, akkor ez elegendő feltétel ahhoz, hogy négyzet legyen. De szükséges is, hiszen ha nem lenne igaz, hogy szögei és oldalai is egyenlők, akkor nem lenne négyzet.

Egy másik megfogalmazás: *A* **akkor és csak akkor** igaz, ha *B* is igaz. Ez azt jelenti, hogy ha *A* igaz, akkor *B* is igaz ($A \Rightarrow B$), de csak akkor ha *A* igaz, és semmilyen más esetben. Ez azt jelenti, hogy *B* teljesülése esetén *A*-nak is teljesülnie kell, vagyis $B \Rightarrow A$.



és



$A \Rightarrow B$, és $B \Rightarrow A$, így $A \Leftrightarrow B$.

Az ekvivalencia kommutatív és asszociatív.

TK12: 26-27/1-5
Szürke I./68, 70-80, 82, 94, 98, 104, 108-109
Szürke II: 2983-2985
Sárga I/158-160, 179-190