GRÁFOK

ALAPFOGALMAK

Gráfnak nevezzük pontoknak és éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, legfeljebb két pont illeszkedik.

Megtörténhet, hogy ugyanazt a *P, Q* pontot két vagy több él köti össze, akkor ezeket **párhuzamos** (vagy többszörös) **éleknek** nevezzük.

Ha egy élre egy pont illeszkedik, azaz egy él végpontja azonos, akkor azt az élt **hurokélnek** nevezzük.

Ha egy gráfban nincsenek párhuzamos élek és nincs hurokél, akkor azt **egyszerű gráfnak** nevezzük.

Ha egy gráfnak mindegyik pontjából pontosan egy-egy él vezet a gráf összes többi pontjához, akkor azt **teljes gráfnak** nevezzük.

A gráf egy pontjába összefutó élek számát a pont **fokszámának**(röviden fokának) nevezzük.

Útnak nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.

Vonalnak nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorát, amelyben egyetlen él sem szerepel egynél többször.

Körnek nevezzük a kezdőpontjába visszavezető utat, azaz olyan élsorozatot, amely kezdőpontjába tér vissza, és benne minden pont és minden él csak egyszer szerepel.

Összefüggőnek nevezünk egy gráfot, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.

Euler-vonalnak nevezünk a gráfban egy vonalat, amely a gráf minden élén áthalad. Az Euler-vonal lehet **nyitott**, ha a kezdőpontja nem egyezik meg a pontjával, vagy lehet **zárt**, ha a kezdőpontja megegyezik a végpontjával.

Fa: körmentes összefüggő gráf

Néhány egyszerű és alapvető tétel a gráfokkal kapcsolatban:

1. tétel: Minden gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő, tehát páros szám.

Bizonyítás: mivel minden él két pontot köt össze, ezért a fokszámok összege valóban az élek számának kétszeresével egyenlő.

2. tétel: **Minden egyszerű gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.**
Bizonyítás: : mivel a pontok fokszámának összege egyenlő az élek számának kétszeresével, ezért ez a szám páros. Ha ebből az összegből levonjuk a páros fokú pontok fokszám összegét, a különbség továbbra is páros lesz. De ez a különbség éppen a páratlan fokú pontok fokszám összegével egyenlő. Ezzel beláttuk az állítást.

3. tétel: Az n-pontú teljes gráf éleinek száma n*(n-1)/2.

Bizonyítás: Vegyük a gráf egy tetszőleges pontját. Ebből n-1 darab él indul ki, mivel a gráf teljes. Mivel a gráfnak n pontja van, ezért első megközelítésben n*(n-1) él adódik. De ebben a meggondolásban minden élt pontosan kétszer veszünk számításba, így valójában az n-pontú teljes gráf éleinek a száma: n*(n-1)/2.

4. tétel: Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás: Induljunk el a szóban forgó gráf egy tetszőleges pontjából és haladjunk a gráf élein. Mivel minden pont foka legalább kettő, így bármelyik új pontba jutva, még be nem járt élen haladhatunk tovább. Csak akkor akadhatunk meg, ha már érintett pontba jutunk. Ekkor azonban a gráf egy körét is bejártuk. Ezzel beláttuk az állítást.

5. tétel: Ha egy n-pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van a gráfban kör.

Bizonyítás: az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás n=1-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamely n>= 1-re minden n-pontú és legalább n-élű gráfban van kör. Belátjuk, hogy akkor minden n+1-pontú és legalább n+1-élű gráfban is van kör. Legyen G egy n+1-pontú gráf, amelynek legalább n+1 éle van. Ha G-nek van elsőfokú pontja, akkor töröljük ezt a pontot, a hozzá tartozó éllel együtt. Az így kapott gráfnak n pontja van és legalább n éle, így az indukciós feltevés szerint tartalmaz kört. Ezt a kört viszont G is tartalmazza. Ha G-nek nincsen elsőfokú pontja, akkor minden pontjának foka legalább 2, így a 4. tétel szerint van benne kör. Ezzel az állítást beláttuk.

Tétel: Egy összefüggő gráfnak akkor és csak akkor van Euler-vonala, ha a gráf minden pontjának a fokszáma páros szám.

Tétel: Ha egy összefüggő gráfban minden pont fokszáma páros, akkor a gráfban van zárt Euler-vonal.

Tétel: Ha egy összefüggő gráfban két pont fokszáma páratlan, többi pont fokszáma páros, akkor a gráfban van nyitott Euler-vonal.

Tétel: Az n csúcsú fagráfnak n – 1 éle van.

Tétel: Ha n pontú gráfban bármely pont fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráf egyetlen pontból kiindulva bejárható úgy, hogy ugyanoda érkezünk vissza (van Hamilton-köre).

Euler-tétele: e+2 = c + l.

Egy bolygón l különálló medence van, csak az egyikben van víz. El akarjuk árasztani a bolygót vízzel. Hány élt kell felrobbantanunk? l – 1 (eggyel kevesebbet elegendő felrobbantani, mint a medencék száma). Hány marad? c – 1 (az összefüggő fagráfnak eggyel kevesebb éle van, mint a csúcsok száma).

FELADATOK

1. Rajzolj olyan ötpontú gráfot, melyben minden pont fokszáma különböző!
2. Egy hat fős társaság tagjai találkozáskor kezet fognak. Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel fogott kezet.
3. Egy n fős társaság tagjai találkozáskor kezet fognak. Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan ember, aki ugyanannyi emberrel fogott kezet.
4. Egy hattagú társaságban mindenki a társaságnak pontosan három tagjával fogott kezet. Hány kézfogásra került sor? Ábrázold gráffal!
5. Vívóbajnokságon mindenki mindenkivel játszik. Nincs döntetlen. Sorba lehet-e állítani a játékosokat aszerint, hogy minden játékos előtt olyan álljon, aki őt megverte? (Igen. Bizonyítás teljes indukcióval)
6. Egy sakkversenyen 6 játékos körmérkőzést játszik. Bizonyítsuk be, hogy a verseny bármely pillanatában van három olyan versenyző, akik játszottak egymással (mindegyik mindegyikkel) vagy három olyan versenyző, akik közül semelyik kettő nem játszott egymással! (Bármelyik versenyző legalább hárommal játszott vagy legalább hárommal nem. Ha ezek közül valamelyik kettő össze van kötve, akkor készen vagyunk. Ha semelyik kettő nincs összekötve, akkor ők a keresett hármas.)
7. Két iskola diákjai sakkversenyt rendeznek. Mindenki mindenkivel játszik, és mindenki páros számú mérkőzést. Mutassuk meg, hogy ekkor a páros számú azon mérkőzések száma is, melyeket különböző iskolák diákjai játszottak egymással!

8. Egy felügyelő és 12 gyanúsított vesz részt egy kihallgatáson. Mindenkinek 6 ismerőse van. Az egyik gyanúsított megjelöli egy papíron lévő névsoron az ismerőseit, és továbbadja egyiküknek a névsort. Lehet-e a végén olyan valaki, akit senki sem jelölt meg? (Nem, mert két embert kiválasztva összesen 12 ismerősük van, de rajtuk kívül csak 10 ember van. Így van legalább 2 közös ismerősük. Ez bármely két gyanúsítottra igaz.)

9. Egy n fős sakkversenyen legfeljebb hány győzelem születhet?