Kombinatorika és Valószínűségszámítás feladatsor (2012 május) 11. osztály

Kombinatorika

1. A 0,1,2,3,4 számjegyekből hány valódi ötjegyű szám írható fel, amelyben legalább az egyik számjegy ismétlődik?
2. Egy raktárpolcon 15 üveg bor áll. 10 üvegben fehérbor, 5 üvegben vörösbor van. Hányféleképpen választhatunk 6 palackot úgy, hogy azokból éppen kettőben legyen vörösbor?
3. Egy társaságban 7 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alakulhat ki belőlük 5 egyszerre táncoló pár? (Egy pár egy fiúból és egy lányból áll.)
4. Hányféle vízszintesen csíkozott zászló készíthető 5 szín felhasználásával, ha két azonos szín nem kerülhet egymás mellé, és a zászló a) egyszínű; b) kétsávos; c) háromsávos?
5. Hányféleképpen ülhet le 10 ember egymás mellé egy padra, illetve egy kerek asztal köré, ha közülük kettő mindenképpen egymás mellé szeretne ülni?
6. Hányféleképpen ülhet le 13 ember egymás mellé egy padra, ha közülük kettő semmiképp sem szeretne egymás mellé ülni?
7. Hányféleképpen olvasható ki a MATEMATIKA szó, ha csak balról jobbra és lefelé haladva olvashatunk?

M	A	T	E	M
A	T	E	M	A
T	E	M	A	T
E	M	A	T	I
M	A	T	I	K
A	T	I	K	A

8. Hány olyan valódi négyjegyű szám van, amelyben legalább egy páros és legalább egy páratlan számjegy szerepel?
9. Állapítsuk meg, hogy a hatványozás és az összevonások elvégzése után hány tagot tartalmaz a $(x-2y+3z)^6$ kifejezés.
10. Egy ökölvívó egy meccsen összesen 17 ütést szenvedett el. Ezek mindegyike jobbegyenes ill. jobbhorog volt. Tudjuk, hogy 3-mal több horgot kapott mint egyenest. Hányféleképpen következhettek be az ütések egymás után?
11. Egy 20 fős üdülő társaság 5 fős turnusokban ebédel. Hányféleképpen lehetséges ez?
12. Egy 20 fős üdülő társaság egyszerre ül le ebédelni. Hányféleképpen lehetséges ez, ha

a) négy darab 5 fős asztal van;
b) három asztal van: 12, 6 és 2 fős;
c) négy asztal van: két 6 fős és két 4 fős?

13. Hány olyan totószelvényt lehet kitölteni, melyen (a 13+1-ből) pontosan 2 jó találat van, illetve olyat, amelyen legalább 2 jó találat van?
14. A régi buszjegykezelő automaták a menetjegy 9 mezőjéből lyukasztottak ki néhány pontot. Hányféle érvényesítés lehetséges, ha az automata legalább 2 és legfeljebb 4 helyen lyukaszt? Mekkora ez a szám akkor, ha a lyukak száma tetszőleges?
15. Hány darab szót lehet készíteni a LEPORELLÓ szó betűinek felcserélésével?
16. Hányféleképpen lehet egy 4 házaspárból álló társaságot leültetni egy kerek asztal köré, ha

a) mindenki a házastársa mellé akar ülni,
b) két azonos nemű nem ülhet egymás mellett,
c) bárki bárki mellé ülhet,

és a székek számozottak? Mennyiben változik az eredmény, ha a székek nem számozottak (tehát csak az számít, hogy ki ki mellett ül)?

17. Egy tolmácsközvetítő cégnek egy adott napon 9 különböző helyre kell 9 tolmácsot küldenie. Hányféleképpen lehetséges ez, ha közülük 4 nő, és a kilenc helyszínből háromra férfi tolmácsot kértek?
18. Hányféleképpen juthatunk el a sakktábla bal felső sarkából a jobb alsó sarkába, ha csak balról jobbra ill. felülről lefelé haladhatunk?
19. 3 dobókockával dobva hányféle különböző eredmény jöhet ki, ha a kockák a) azonos színűek; b) különböző színűek; c) közül kettő piros, a harmadik fehér?
20. Egy kórteremben három beteg van. Mindegyikük különböző gyógyszereket szed: számszerint 5-öt, 2-t illetve 3-at. A gyógyszereket szétosztó nővér kiejti a kezéből a külsőre megkülönböztethetetlen pirulákat, melyek teljesen összekeverednek. Hányféleképpen tudják a gyógyszereket bevenni a betegek, ha darabra mindenki annyit szed be, amennyit kellene? Ebből mennyi azoknak a lehetőségeknek a száma, amikor egyetlen beteg sem vesz be olyan gyógyszert, amit neki írtak föl?
21. Egy tombolán három nyereményt lehet megnyerni. A 36 játékos mindegyikének legalább három szelvénye van. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha

a) a nyeremények azonosak, és egy személy csak egyet nyerhet;
b) a nyeremények azonosak, és egy személy többet is nyerhet;
c) a nyeremények különbözők, és egy személy csak egyet nyerhet;
d) a nyeremények különbözők, és egy személy többet is nyerhet?

22. Egy kerek asztal köré 15-en ülnek le. Az asztal fölött mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történik? Hány olyan kézfogáspár van, ami keresztezi egymást?

Klasszikus valószínűség

23. Egy 12 tagú diákcsoportban 9 fiú és 3 lány van. Két színházjegyet sorsolnak ki közöttük. A sorsolást úgy végzik, hogy az összes nevet tartalmazó dobozból két nevet

húznak ki. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két lány kapja a jegyeket?
24. Egy minden oldalán befestett kockát 1000 azonos méretű kis kockára fűrészelnek szét. A kis kockákból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez két oldalán festve van?
25. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük, majd visszatesszük. Ezután jól megkeverjük a csomagot és ismét választunk egy lapot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez utóbbi lap nem azonos az elsővel, illetve annak, hogy a színe nem azonos az elsőével?
26. Öt különböző szakasz hossza rendre 1,3,5,7,9 egység. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva közülük hármat, azokból háromszög szerkeszthető.
27. Egy pakli magyar kártyából egyszerre 3 lapot húzunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között legalább egy zöld van (A), pontosan egy zöld van (B), legfeljebb egy zöld van (C)?
28. Egyszerre dobunk 6 kockával. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább két kockán azonos pontszám lesz? (Vigyázat! A kockák akkor is különbözőek, ha szabad szemmel nem tudjuk megkülönböztetni őket! $|\Omega| \neq = \binom{11}{5}$.)
29. Egy csomag magyar kártyát jól megkeverünk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a négy király egymás után következik (A), a nyolc tök egymás után következik (B), a különböző színű kártyák nem keverednek egymással (C)?
30. Tíz tojásból négy záp. Véletlenszerűen kiválasztott hat tojásból lágytojást készítünk reggelire. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az elkészített tojások harmadát ki kell dobni (A)? És annak, hogy mindet megesszük (B)?
31. Egy csoportban 10 diák van, melyek közül hármat véletlenszerűen felszólít a tanár. Ha a diákok közül négy tanul folyamatosan, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy a tanár minden kérdésére helyes válasz kap (A), illetve, hogy kap helyes választ (B)? (Feltesszük, hogy pontosan a folyamatosan tanuló diákok adnak helyes választ a feltett kérdésre.)
32. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a totón az első 13 mérkőzés eredménye közül 11-et találunk el (A), illetve, hogy legalább két találatunk lesz (B)?
33. Adjuk meg a lottó 5-ös, 4-es, 3-as, 2-es és az 1-es találatok valószínűségeit. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egyetlen találatunk sem lesz?
34. Egy gyártósor 3%-os selejtaránnyal dolgozik. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 10 db visszatevéssel kiválasztott alkatrész között nincs selejt; lesz selejt; pontosan 2 db selejt lesz; legföljebb 2 db selejt lesz; legalább 2 db selejt lesz?

Geometriai valószínűség

35. Egy 360 méter hosszú járdán egyetlen kátyú van. Egy ittas alak a sötétben botorkálva végigmegy ezen a járdán. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az út háromnegyedéig nem botlik el, ha pontosan a kátyúnál fog megbotlani?
36. Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban két hajó érkezik. Az előbb érkezőn rögtön megkezdik a rakodást, mely az egyiken egy órát, a másikon két órát vesz igénybe. Ha a második hajó akkor érkezik, mikor a másikon még rakodnak, úgy várakoznia kell a rakodás befejeztéig. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egyik hajónak sem kell várakoznia a rakodásra?
37. Adott egy 3 és 2 oldalhosszúságú téglalap alakú céltábla, melyet biztosan eltalálunk. Geometriai valószínűséget feltételezve mekkora annak a valószínűsége, hogy egy lövés

a) valamelyik 3 hosszú éltől legföljebb 1 egység távolságra;
b) a téglalap átlóinak metszéspontjától legfeljebb 0,5 egység távolságra;
c) a legközelebbi 2 hosszú éltől legalább 0,3 egység távolságra;
d) a bal felső csúcsponttól legalább 1 egység távolságra;
e) a bal felső csúcsponttól pontosan 1 egység távolságra

csapódik be?
38. Hagyományos, 1 cm vastagságú koncentrikus körgyűrűkkel felosztott 20 cm átmérőjű céltáblát 1 valószínűséggel eltalálunk. A legbelső 1 cm sugarú kör a 10-es mező, . . . , a legkülső körgyűrű az 1-es mező. Mekkora a valószínűsége annak, hogy vaktában lövöldözve

a) 10-est lövünk;
b) legalább 6-ost lövünk;
c) legalább 2-est, de legfeljebb 7-est lövünk?

Minek nagyobb a valószínűsége: 4-est vagy 7-est, vagy pedig 2-est vagy 10-est lövünk?
39. Zolika és Matyika „társasoznak”. A játékszabályok a következők: Zolika a [0,2]-ból, Matyika az [1,2] intervallumból választ egy számot. Matyika nyer, ha az általa választott szám vagy nagyobb, mint Zolika számának háromszorosa, vagy legalább eggyel kisebb, mint Zolika számának kétszerese. Melyiküknek nagyobb a nyerési esélye, ha a számok választása véletlenszerű, geometriai eloszlásnak megfelelő?

Létezik-e „nyerő stratégia” akkor, ha a számok kiválasztása nem véletlenszerű, hanem (az adott intervallumból) bármelyik szám önkényesen választható? Ha igen, akkor kinek van, és mi a nyerő stratégia? (Pl. Zolikának akkor van nyerő stratégiája, ha tud olyan számot választani, amellyel mindig nyer.)

Eredmények

Kombinatorika

1. 2404.
2. $\binom{5}{2}\binom{10}{4}$.
3. $\frac{7!}{2!}$.

4. a) 5, b) 20, c) 80.
5. Egy padra 9! 2!-féleképpen, egy kerek asztalhoz 8! 2!-féleképpen.
6. $13! - 12!\,2!$
7. $\frac{9!}{4!5!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}$.
8. 7875.
9. 28.
10. $\binom{17}{7}$.
11. $\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}$, mivel a turnusok sorrendje számít.
12. a) $\frac{\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}}{4!}$, b) $\binom{20}{12}\binom{8}{6}$, c) $\frac{\binom{20}{6}\binom{14}{6}\binom{8}{4}}{2!2!}$.
13. Pontosan 2 találat: $\binom{14}{2} \cdot 2^{12}$. Legalább 2 találat: 4651897.
14. 246, ha pedig a lyukak száma tetszőleges (persze legalább egy lyuknak kell lennie), akkor 511. Ugyanis $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 246$, illetve $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{9} = 2^9 - 1$.
15. $\frac{9!}{3!2!}$
16. Számozott székek esetén: a) $768 = 4! \cdot (2)^4 \cdot 2$, b) $1152 = 4! \cdot 4! \cdot 2$, c) $40320 = 8!$. Nem számozott székek esetén: a) $96 = \frac{4! \cdot 2^4 \cdot 2}{8}$, b) $144 = \frac{4! \cdot 4! \cdot 2}{8}$, c) $5040 = \frac{8!}{8}$.
17. $43200 = V_5^3 \cdot P_6$.
18. $3432 = \binom{14}{7}$.
19. a) $\binom{8}{3}$, b) 6^3, c) $\binom{7}{2} \cdot 6$.
20. $2520 = \binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$, ha pedig senki sem kap a sajátjából, akkor $10 = \binom{5}{3}\binom{2}{2}$. (Ekkor ugyanis az 5 gyógyszert szedő beteg a többiekét kapja.)
21. a) $7140 = \binom{36}{3}$, b) $8436 = C_{36}^{3(i)} = \binom{36+3-1}{36-1} = \binom{38}{35} = \binom{38}{3}$, c) $42840 = 36 \cdot 35 \cdot 34$, d) $46656 = 36^3$.
22. Az összes kézfogások száma $\binom{15}{2}$. Egymást keresztező kézfogáspárok: $\binom{15}{4}$.

Klasszikus valószínűség

23. $p = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}}$.
24. A kérdés annak a valószínűsége, hogy a kocka legalább két oldalán van festve, tehát $p = \frac{12 \cdot 8 + 8}{1000}$ (két oldalon festettek + három oldalon festettek). Annak a valószínűsége, hogy pontosan két oldalán van festve $p = \frac{12 \cdot 8}{1000}$ (12 éle van egy kockának, és mindegyiken 8 kocka van két oldalán festve).
25. Jelölje A azt az eseményt, hogy a két lap különböző, B pedig, hogy a színük különböző. $P(A) = \frac{31}{32}$, $P(B) = \frac{3}{4}$.
26. A kedvező esetek: $\{3,5,7\}$, $\{3,7,9\}$, $\{5,7,9\}$ ez 3 db, az összes lehetőség pedig $\binom{5}{3}$, így $p = \frac{3}{10}$.
27. $P(A) = 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}$, $P(B) = \frac{\binom{8}{1}\binom{24}{2}}{\binom{32}{3}}$, $P(C) = P(\text{nincs zöld vagy egy zöld}) = \frac{\binom{24}{3} + \binom{8}{1}\binom{24}{2}}{\binom{32}{3}}$.
28. $p = 1 - \frac{6!}{6^6}$.
29. Négy király egymás után 4!-féleképpen következhet, és köréjük még 28 lapot kell elrendezni, ez meg (a négy királyt egy egységnek tekintve) 29! esetet jelent. Így a kedvező lehetőségek száma 4! 29!, az összes lehetőségek száma pedig 32!, azaz $P(A) = \frac{4!\,29!}{32!}$. Analóg gondolatmenettel adódik, hogy $P(B) = \frac{8!\,25!}{32!}$. Ha a színek nem keverednek, akkor a színek 4!-féleképpen következhetnek egymás után, és mindegyik színen belül a figuráknak 8! elrendezése lehetséges. Ezért $P(C) = \frac{4!\,(8!)^4}{32!}$.
30. $P(A) = P(2 \text{ záp}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{4}}{\binom{10}{6}}$, $P(B) = \frac{1}{\binom{10}{6}}$.
31. $P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$, $P(B) = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$.
32. $P(A) = \frac{\binom{13}{2}2^2}{3^{13}}$, $P(B) = 1 - \left(\frac{2^{13}}{3^{13}} + \frac{13 \cdot 2^{12}}{3^{13}}\right)$.
33. $P(\text{„5"}) = \frac{1}{\binom{90}{5}}$, $P(\text{„4"}) = \frac{\binom{5}{1} \cdot 85}{\binom{90}{5}}$, $P(\text{„3"}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$, $P(\text{„2"}) = \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$, $P(\text{„1"}) = \frac{5 \cdot \binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}$, $P(\text{„0"}) = \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} \approx 75\%$.
34. Binomiális eloszlást használva:

$$P(\text{nincs selejt}) = p_0 = \binom{10}{0} 0{,}03^0\, 0{,}97^{10} = 0{,}97^{10} \approx 0{,}737$$

$$P(\text{lesz selejt}) = 1 - p_0 \approx 0{,}263$$

$$P(\text{pontosan 2 db selejt}) = p_2 = \binom{10}{2} 0{,}03^2\, 0{,}97^8 \approx 0{,}0317$$

$$P(\text{legföljebb 2 db selejt}) = p_0 + p_1 + p_2 \approx 0{,}997$$

$$P(\text{legalább 2 db selejt}) = 1 - (p_0 + p_1) \approx 0{,}0345$$

Geometriai valószínűség

35. $p = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$.
36. $p = \frac{\frac{22^2 + 23^2}{2}}{24^2} \approx 0{,}88$.
37. a) Ha valamelyik (de tetszőlegesen rögzítettnek gondolt) oldaléltől vesszük, akkor $p = \frac{1}{2}$, ha bármelyiket értjük alatta (mindkettőt), akkor persze $p = 1$; b) $p = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi}{6}$; c) $p = 0{,}8$; d) $p = 1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{6}$; e) $p = 0$.
38. a) $p = 0{,}01$; b) $p = 0{,}25$; c) $p = 0{,}72$. 4-es vagy 7-es lövésének valószínűsége 0,2, míg annak hogy 10-est vagy 2-est lövünk 0,18. Tehát az előbbinek nagyobb a valószínűsége.
39. $P(\text{Matyika nyer}) = \frac{5}{8}$. Tehát Matyika nyerési esélye nagyobb. Azonban Zolikának van nyerő stratégiája, ugyanis ha a $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ intervallumból választ számot, akkor bizonyosan nyer.