THEORIE DER QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

Spezielle quadratische Gleichungen

a)

$$3x^2-12=0$$
$$x^2=4$$
$$|x|=2$$
$$x_1=2 \qquad x_2=-2$$

b)

$$10x^2+8x=0$$
$$2x(5x+4)=0$$
$$2x=0 \qquad 5x+4=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=-\frac{4}{5}$$

Ergänzung auf vollständiges Quadrat

$$2x^2 - 12x + \frac{27}{2} = 0$$

$$2(x^2 - 6x) + \frac{27}{2} = 0$$

$$2\left[(x-3)^2 - 9\right] + \frac{27}{2} = 0$$

$$2(x-3)^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$(x-3)^2 = \frac{9}{4}$$

$$|x-3| = \frac{3}{2}$$

$$x - 3 = \frac{3}{2} \qquad x - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{9}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

Lösungsformel

spezielle	Im Allgemeinen
$3x^2+5x-2=0$	$ax^2+bx+c=0$
$3\left(x^2+\frac{5}{3}x\right)-2=0$	$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0$
$3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]-2=0$	$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=0$
$3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}-2=0$	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$
$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{49}{36}$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{7}{6}$	$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_1=\frac{1}{3}$ $\quad$ $x_2=-2$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

$D > 0$ → zwei verschiedene reelle Lösungen

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

z.B. $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\qquad (-7)^2 - 4\cdot2\cdot3 > 0$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2} = \frac{7\pm5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$D = 0$ → zwei gleiche reelle Lösungen

$$x_1 = x_2 = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

z.B. $2x^2 - 8x + 8 = 0$ $\qquad (-8)^2 - 4\cdot2\cdot8 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot2\cdot8}}{2\cdot2} = \frac{-8\pm0}{4} = \begin{cases} \underline{\underline{-2}} \\ \underline{\underline{-2}} \end{cases}$$

$D < 0$ → keine reelle Lösungen

z.B. $5x^2 + 7x + 4 = 0$ $\qquad 7^2 - 4\cdot5\cdot4 < 0$

$$x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5} = \frac{-7\pm\sqrt{-31}}{10} \quad \emptyset$$

Linearfaktorization

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

wenn die Gleichung in der Menge der reellen Zahlen lösbar ist und die Lösungen x_1 und x_2 sind.

z.B.

$$7x^2-5x-12=0$$

$$x_{1;2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4\cdot 7\cdot(-12)}}{2\cdot 7} = \frac{5\pm 19}{14} = \begin{cases} \frac{12}{7} \\ -1 \end{cases}$$

$$7x^2-5x-12 = 7\left(x-\frac{12}{7}\right)(x+1)$$

Quadratische Ungleichungen

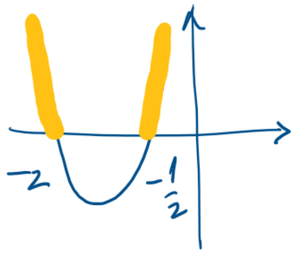
Methode der Lösung einer quadratischen Ungleichung:

1. Wir lösen statt der Ungleichung die Gleichung.
2. Wir stellen den Graph der linken Seite der Ungleichung als eine qiadratische Funktion dar.
3. Wir lesen die Lösung der Ungleichung ab.

1) $4x^2 + 9x + 2 \geq 0$

$4x^2 + 9x + 2 = 0$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -\frac{1}{4}$

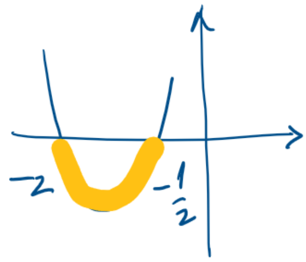


Lösung: $x \leq -2$ oder $x \geq -\frac{1}{4}$

2) $4x^2 + 9x + 2 \geq 0$

$4x^2 + 9x + 2 = 0$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -\frac{1}{4}$

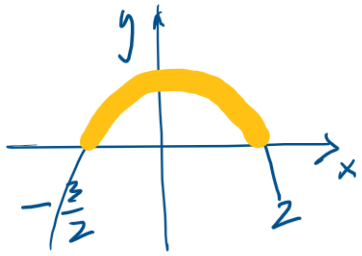


Lösung: $-2 < x < -\frac{1}{4}$

3) $-2x^2 + x + 6 > 0$

$-2x^2 + x + 6 = 0$

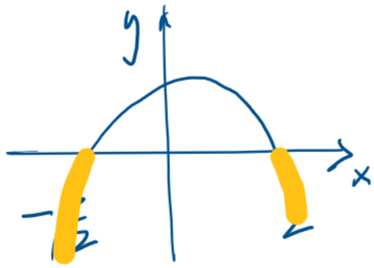
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$



Lösung: $\underline{-\frac{3}{2} < x < 2}$

4) $-2x^2 + x + 6 \leq 0$

$-2x^2 + x + 6 = 0$

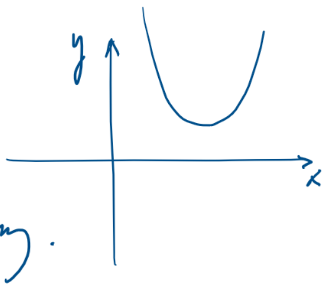


$x_1 = 2 \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$

Lösung: $\underline{x \leq -\frac{3}{2} \text{ oder } x \geq 2}$

5) $6x^2 + 5x + 2 \geq 0$

$6x^2 + 5x + 2 = 0$

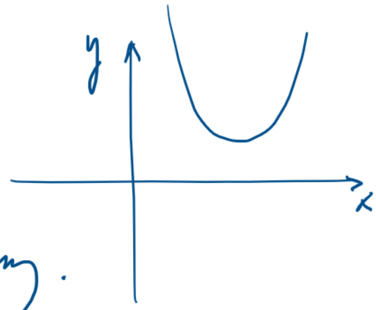


Die Gleichung hat keine Lösung.

Die Lösung der Ungleichung sind alle reelle Zahlen.

6) $6x^2 + 5x + 2 < 0$

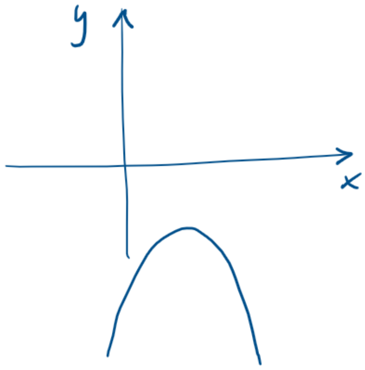
$6x^2 + 5x + 2 = 0$



Die Gleichung hat keine Lösung.
Die Ungleichung hat auch keine Lösung.

7) $-4x^2 + 3x - 1 > 0$

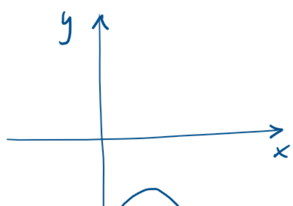
$-4x^2 + 3x - 1 = 0$



Die Gleichung hat keine Lösung.
Die Ungleichung hat auch keine Lösung.

8) $-4x^2 + 3x - 1 \leq 0$

$-4x^2 + 3x - 1 = 0$

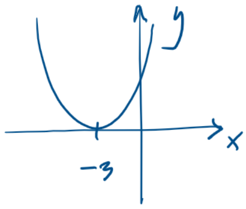


Die Gleichung hat keine Lösung.
Die Lösung der Ungleichung sind alle reelle Zahlen.

9) $x^2+6x+9 \geq 0$

$x^2+6x+9 = 0$

$x_1 = x_2 = -3$

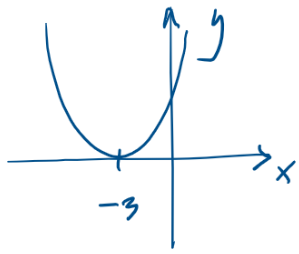


Die Lösung der Ungleichung sind alle reelle Zahlen.

10) $x^2+6x+9 > 0$

$x^2+6x+9 = 0$

$x_1 = x_2 = -3$

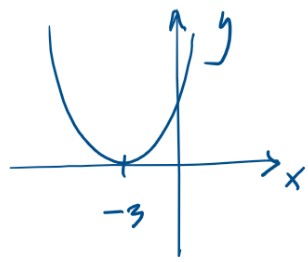


Die Lösung der Ungleichung: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

11) $x^2+6x+9 \leq 0$

$x^2+6x+9 = 0$

$x_1 = x_2 = -3$

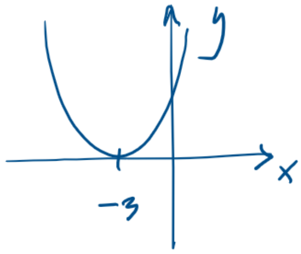


Die Lösung der Ungleichung: $\underline{\underline{x = -3}}$

12) $x^2+6x+9 < 0$

$x^2+6x+9 = 0$

$x_1 = x_2 = -3$



Die Ungleichung hat auch keine Lösung.