

MÁSODFOKÚ MINDEN

A megoldóképlet alkalmazása

Oldd meg a következő egyenleteket!

1. $(2x+2)(6x-1)+x+2=(4x+3)^2$

2. $(3x-1)(3x+1)=(2x-1)^2-1$

3. $6(x+1)^2-7(x-1)=19$

A diszkrimináns, paraméteres feladatok a gyökök számával kapcsolatosan

4. Az m valós paraméter mely értékei esetén van a $(2m-5)x^2-(7-m)x+m+1=0$ egyenletnek két egyenlő valós gyöke? $m=3$ vagy $m=-\frac{23}{7}$

5. Az m valós paraméter mely értékei esetén van a $(m+2)x^2-(2m-4)x+\frac{m}{3}=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke? $m < 1$ vagy $m > 6$

6. Az m valós paraméter mely értékei esetén nincs a $(2m-1)x^2-(2m+2)x+m+1=0$ egyenletnek valós gyöke? $-1 < m < 2$

7. Az m valós paraméter mely értékei esetén van a $(m+4)x^2-(m+6)x-m=0$ egyenletnek két egyenlő valós gyöke? $m=-2$ vagy $m=-\frac{18}{5}$

8. Az m valós paraméter mely értékei esetén van a $(2m+7)x^2-2mx+3-2m=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke? $m < -3$ vagy $m > \frac{7}{5}$

9. Az m valós paraméter mely értékei esetén nincs a $(3m+1)x^2 - (5m+3)x + 5 - m = 0$ egyenletnek valós gyöke?

$$-\frac{11}{37} < m < 1$$

A következő egyenleteknek m illetve p milyen értékeinél van két egyenlő, illetve két különböző valós gyöke? Milyen paraméter értékek esetén nincs valós gyöke?

10. $(m-2)x^2 - (3m+6)x + 6m = 0$
 11. $x^2 + (4m+2)x + 3m^2 + 2m + 9 = 0$
 12. $(p+2)x^2 + 6px + 4p + 1 = 0$
 13. $(1-m)x^2 + (m+2)x + 1 = 0$
 14. $2x^2 + (3p+2)x + p^2 + 4 = 0$
 15. $2x^2 - (2p+8)x + 6p + 14 = 0$
 16. $x^2 + 2px + 5p = 0$
 17. $x^2 - mx + 2m = 0$
 18. $x^2 + (p+2)x + 2p + 4 = 0$
 19. $x^2 - 2px + p + 8 = 0$
 20. $x^2 - (p+2)x + p + 2 = 0$
 21. $(p-1)x^2 - 2(p+1)x + p + 4 = 0$
 22. $9x^2 + (p+1)x + \frac{1}{4} = 0$

Paraméteres egyenletek a másodfokú kifejezés előjelére vonatkozóan

23. A t paraméter mely értékei esetén lesz a $(2t-5)x^2 - (10-t)x + 3$ kifejezés értéke minden valós x -re pozitív?

$$4 < t < 40$$
24. A t paraméter mely értékei esetén lesz a $(t-2)x^2 + (t+3)x + 12 - t = 0$ kifejezés értéke minden valós x -re pozitív?

$$3 < t < 7$$
25. A t paraméter mely értékei esetén lesz a $(t-2)x^2 + (t+3)x + 12 - t$ kifejezés értéke minden valós x -re negatív?
 nincs megoldás
26. A t paraméter mely értékei esetén lesz a $(5t-3)x^2 - (3t+1)x + t + 1$ kifejezés értéke minden valós x -re negatív?

$$t < -\frac{13}{11}$$

27. A t paraméter mely értékei esetén lesz a $(t-6)x^2 + (2t-10)x + t - 3$ kifejezés értéke minden valós x -re pozitív?
 $t > 7$

28. A t paraméter mely értékei esetén lesz a $(t-4)x^2 + (3t+1)x - 25$ kifejezés értéke minden valós x -re negatív?
 $-\frac{133}{9} < t < 3$

A másodfokú kifejezések gyöktényező alakja

Írd fel a következő másodfokú egyenlet gyöktényező alakját!

29. $4x^2 - 8x - 32 = 0$

30. $3x^2 - 6x - 24 = 0$

31. $2x^2 - 2x - 24 = 0$

32. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

33. $5x^2 + 32x - 21$

34. $6x^2 + 22x - 8 = 0$

35. $3x^2 + x - 4 = 0$

Egyszerűsítsd a következő algebrai törteket!

36. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

37. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x}$

38. $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12}$

39. $\frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + 7x + 6}$

40. $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$

41. $\frac{4x^2 + 5x - 6}{x^2 - 4x + 4}$

42. $\frac{5x^2 + 24x - 5}{x^2 + 3x - 10}$

43. $\frac{3x^2 - 3x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

A Viéte-formulák

44. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p^2 - 3p + 1)x^2 + (p - 2)x - 12 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek összege -1 ? $p = 3$ vagy $p = 1$
45. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p^2 - 4p - 4)x^2 + (2p - 7)x - 10 = 0$ másodfokú egyenlet szorzata -10 ? $p = 5$ vagy $p = -1$
46. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p - 1)x^2 - (p + 1)x - 2p = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek szorzata -4 ? $p = 2$
47. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(3p^2 - 2)x^2 - (2p - 1)x - 18 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek összege -3 ? $p = \frac{7}{9}$ vagy $p = -1$
48. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p + 5)x^2 - (p + 2)x + p + 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek szorzata -3 ? $p = -4$
49. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p^2 + 4p + 1)x^2 + (p + 5)x - 14 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek összege -5 ? $p = 0$ vagy $p = -\frac{19}{5}$
50. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(5p^2 - 3)x^2 + (2p + 1)x - 2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek összege $-1,5$? $p = \frac{11}{75}$ vagy $p = -1$
51. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p + 8)x^2 + (2p + 5)x - p - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek szorzata $\frac{2}{3}$? $p = -5$
52. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p + 8)x^2 + (2p + 5)x - p - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek négyzetösszege 20 ? $p = 2$ vagy $p = \frac{82}{55}$
53. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $3x^2 - (2p + 16)x + p^2 + 2p + 16 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek reciprokösszege 1 ? $p = 0$

54. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $(p-3)x^2 + (6-p)x - p + 1 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek négyzetösszege 10? $p = 4$ vagy $p = \frac{12}{7}$

55. A p valós paraméter mely értékei esetén lesz a $8x^2 - (2p+6)x + p^2 - 5p + 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek reciprokösszege 2? $p = 6$ vagy $p = 0$

Algebrai törtes egyenletek

$$56. \frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} = 5 \frac{5}{9} \quad x_1 = -5, x_2 = 5$$

$$57. \frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{38-3x^2}{1-x^2} \quad x_1 = -\frac{11}{5}, x_2 = 6$$

$$58. \frac{2x}{x-2} + \frac{2x}{x+4} = \frac{48-12x}{(x-2)(x+4)} \quad x = -6$$

$$59. \frac{2x}{x-4} - \frac{2}{x-1} = \frac{24}{(x-1)(x-4)} \quad x = -2$$

$$60. \frac{15}{x-1} + \frac{5x}{x+1} = \frac{15}{x^2-1} \quad x_1 = -2, x_2 = 0$$

$$61. \frac{3x-2}{x-1} - \frac{2x+3}{x+3} = \frac{4(3x+1)}{(x-1)(x+3)} \quad x_1 = -1, x_2 = 7$$

Másodfokú egyenlőtlenségek

$$62. 3x^2 + 6x - 9 > 0$$

$$63. x^2 + 5x - 4 > -2x^2 + 2x + 2$$

$$64. -2x^2 - 4x + 30 \geq 0$$

$$65. 6x^2 - x + 1 \leq 2x^2 - 6x + 7$$

$$66. 5x^2 - x - 10 \geq 2x^2 + 6x + 10$$

$$67. 3x^2 - 2x + 4 < 2x^2 + 2x - 1$$

Másodfokúra visszavezethető egyenletek

$$68. 3(x-2)^4 + 15(x-2)^2 - 108 = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$69. 4(x^2 - 10x + 26)^2 - 24(x^2 - 10x + 24) - 28 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7$$

$$70. (x^2 + 1)^2 - 15x^2 - 15 = -50$$

$$x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = 3$$

$$71. (x^2 - 3x + 2)^2 - 18(x^2 - 3x + 2) + 72 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 4, x_4 = 5$$

$$72. [x(x+5)]^2 + 4x^2 + 20x = 0$$

$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 0$$

$$73. (x^2 + 2x - 16)^2 - 7(x^2 + 2x - 16) - 8 = 0$$

$$x_1 = -6, x_2 = -5, x_3 = 3, x_4 = 4$$

$$74. (x^2 + 3x - 21)^2 + 4(x^2 + 3x - 20) - 81 = 0$$

$$x_1 = -7, x_2 = -5, x_3 = 2, x_4 = 4$$

$$75. (x^2 + 8x + 14)^2 - x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$x_1 = -6, x_2 = -5, x_3 = -3, x_4 = -2$$

$$76. (x^2 + 2x - 5)^2 - 13(x^2 + 2x - 5) + 30 = 0$$

$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = 2, x_4 = 3$$

$$77. (x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = 3$$

$$78. (x^2 - 3x)^2 - 50(x^2 - 3x) + 400 = 0$$

$$x_1 = -5, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 8$$

Szimmetrikus egyenletek

$$79. 12x^4 - 4x^3 - 41x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{2}{3}, x_4 = -\frac{3}{2}$$

$$80. 12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -4, x_4 = -\frac{1}{4}$$

$$81. 12x^4 + x^3 - 26x^2 + x + 12 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = -\frac{4}{3}, x_4 = -\frac{3}{4}$$

$$82. 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$$

$$83. 3x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$$

$$84. 24x^4 - 38x^3 + 23x^2 - 38x + 24 = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{3}{4}$$

Négyzetgyökös egyenletek

- | | |
|--|--------------------|
| 85. $\sqrt{2x-5} + 2 = x - 2$ | $x = 7$ |
| 86. $\sqrt{3x+4} - 3 = 2x - 7$ | $x = 4$ |
| 87. $2x - 3 = \sqrt{19 - 2x} + 4$ | $x = 5$ |
| 88. $4x + 2 = \sqrt{9 - 5x} - 1$ | $x = 0$ |
| 89. $6x - \sqrt{12 - 3x} = 3$ | $x = 1$ |
| 90. $5x - \sqrt{3x - 2} = 8$ | $x = 2$ |
| 91. $\sqrt{7 - 3x} - \sqrt{3x - 2} = 1$ | $x = 1$ |
| 92. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{2x-3} = 2$ | $x_1 = 2, x_2 = 6$ |
| 93. $\sqrt{10-x} - \sqrt{7x-3} = \sqrt{x}$ | $x = 1$ |
| 94. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-6}$ | $x = 5$ |

Négyzetgyökös egyenlőtlenségek

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| 95. $\sqrt{6x-5} + 2 \leq 2x - 3$ | $x \in [5; \infty[$ |
| 96. $\sqrt{6-2x} - 1 \leq 3x - 2$ | $x \in [1; 3]$ |
| 97. $x - 11 \leq \sqrt{3x+1} - x$ | $x \in \left[-\frac{1}{3}; 8\right]$ |
| 98. $3x - 7 \leq \sqrt{7x-5} - 2x$ | $x \in \left[\frac{5}{7}; 2\right]$ |
| 99. $\sqrt{5-x} - 4 > 2x - 11$ | $x \in]-\infty; 4[$ |
| 100. $\sqrt{7-3x} - 1 > 2x + 9$ | $x \in]-\infty; -3[$ |
| 101. $x + 5 < \sqrt{4x+5} - 3x$ | $x \in \left]-\frac{5}{4}; -1\right[$ |
| 102. $x + 9 < \sqrt{1-4x} - 2x$ | $x \in]-\infty; -2[$ |

Másodfokú egyenletrendszerek

103. (1) $(x-2)(y-3) = 1$ (2) $\frac{x-2}{y-3} = 1$

104. (1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5}$ (2) $\frac{x}{2} = 2 + \frac{y}{2}$

105. (1) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ (2) $4x + 3y = 24$

106. (1) $x^2 + y^2 + 4xy = 286$ (2) $x + y = 14$

107. (1) $x + 2y = 14$ (2) $x^2 + 4y^2 = 100$

108. (1) $xy + y^2 = 55$ (2) $2x + y = 17$

109. (1) $(x-2)(y-3) = 1$ (2) $\frac{x-2}{y-3} = 1$

110. (1) $2x^2 - 3y^2 = 5$ (2) $2x - y + 4 = 0$

Szöveges feladatok

111. Egy építkezéshez 30 tonna anyagot kell kiszállítani. A szállításhoz a megrendeltnél 2 tonnával kisebb teherbírású teherautókat küldtek, de 4-gyel többet, így a szállítást időben elvégezheték. Hány teherautó végezte a szállítást és hány tonnásak voltak?
112. Az egymástól 600 km-re lévő *A* és *B* városokból egyszerre indult el egymással szemben két vonat. 5 óra múlva a vonatok közt a távolság 150 km, és még nem találkoztak. Ha *B*-ből másfél órával előbb indult volna el a vonat, mint *A*-ból, akkor félúton találkoztak volna. Mekkora a vonatok sebessége?
113. Két tanulóbrigádot az iskola előtti terület füvesítésével bíznak meg. A két brigád együttes munkával 6 nap alatt tudná teljesíteni a feladatot. Az egyik brigád egyedül 5 nappal hosszabb idő alatt tudja elvégezni a munkát, mint a másik. Hány nap alatt tudja elvégezni a munkát mindkét brigád egyedül?
114. Juliska a Mézeskalács Házikó és a Kerékpárjavító Műhely közti 150 km-es távolságot kerékpáron $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val kisebb sebességgel 4 órával több idő alatt teszi meg, mint Jancsi. Mekkora a mesehősök sebessége és mennyi ideig tart nekik az út megtétele?
115. Egy kétjegyű számban az egyesek helyén kettővel nagyobb számjegy szerepel, mint a tízesek helyén. Ha a számjegyeket felcseréljük, és az így kapott számot az eredetivel összeszorozzuk, az eredmény 403. Melyik ez a szám?

116. Két egér közösen 12 nap alatt eszik meg egy zacskó lisztet. Az egyik egér egymaga 10 nappal gyorsabban enné meg a zacskónyi lisztet, mint a másik egér. Mennyi idő alatt végeznének a zsák liszttel külön-külön?
117. Egy kétjegyű számban az egyesek helyén öttenél nagyobb számjegy szerepel, mint a tízesek helyén. Ha a számot megszorozzuk számjegyeinek összegével, az eredmény 243. Melyik ez a szám?
118. Két csiga hosszútávcsúszó versenyt rendez. A táv hossza 7,2 m. Az egyik csiga óránként 2 cm-rel több utat tesz meg, így 4 órával hamarabb ér célba. Hány cm-t tesznek meg óránként a csigák, és mennyi ideig tart a táv megtétele?
119. Jancsi és Juliska kerékpáron mennek Alapátfalváról Bélapátfalvára. Juliska óránként 4 km-rel kevesebb utat tesz meg, így 1 órával több idő alatt ér egyik faluból a másikba. Mekkora a sebességük, ha a két falu távolsága 120 km?
120. Aladár és Béla együtt 2,4 nap alatt ásnak fel egy kertet. Béla 2 nappal hosszabb idő alatt ássa fel egyedül, mint Aladár. Hány nap alatt ássák fel külön-külön a kertet?
121. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. Ha a számjegyeit felcseréljük, és az így kapott számot megszorozzuk az eredeti számmal, 1855-öt kapunk. Melyik ez a szám?
122. Két városból, amelyek egymástól 900 km távolságra vannak, egymással szembe indul két vonat. A vonatok az út felénél találkoznak. Határozd meg mindkét vonat sebességét, ha az első egy órával később indult, mint a másik, sebessége pedig óránként 5 km-rel nagyobb a másikénál.
123. Egy egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága 2 cm-rel hosszabb az alapjánál, a szára pedig 13 cm. Mekkora a területe?
124. Egy téglalap hosszabb oldala a rövidebb oldal kétszeresénél eggyel kisebb, átlója pedig a rövidebb oldal kétszeresénél eggyel hosszabb. Mekkora a téglalap területe?
125. Egy rombusz egyik átlója a másik kétszeresénél 2-vel nagyobb, kerülete 52. Mekkora az átlói és a területe?

Szélsőérték feladatok

126. Bontsd fel a 60-at két szám összegére úgy, hogy szorzatuk maximális legyen!
127. Bontsd fel a 400-at két szám szorzatára úgy, hogy összegük minimális legyen!
128. Két szám szorzata 100. Mekkora lehet legfeljebb az összegük?
129. Egy 1 m-es zsinórral legfeljebb mekkora területű téglalapot lehet elkeríteni?
130. Egy 1400 m^2 -es téglalap alakú kertet a leggazdaságosabban szeretnénk körbekeríteni a legátlátszóbb fémmel. Mennyibe kerül ekkor a kerítés, ha folyómétere 1400 Ft?
131. Egy 2 m hosszú zsinórból két teljes négyzetet szeretnénk elkeríteni. Milyen esetben lesz minimális, illetve maximális a területösszegük?
132. Egy tó parti téglalap alakú kertet 400 m hosszú kerítéssel szeretnénk elkeríteni. Legfeljebb mekkora területet keríthetünk el?
133. Adott körbe írt téglalapok közül melyik a legnagyobb területű?
134. Az 1 liter ürtartalmú henger alakú dobozok közül melyiket lehet a legkevesebb anyagfelhasználással elkészíteni?
135. Adott ABCD téglalap "köré" írjunk minimális területű egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy egyik oldala az AB oldalegyenesen legyen, a másik kettő pedig illeszkedjen a C ill. D csúcsokra.
136. Adott egy szögcsár és benne egy P pont. A szögcsárból egy P-n átmenő egyenessel kimetszünk egy háromszöget. Hogyan tegyük ezt meg, hogy területe a lehető legkisebb legyen?
137. Papírkorongból tölcseért készítünk úgy, hogy egy körcikket kivágva belőle, kúppá hajtjuk össze. Mekkora legyen a körcikk középponti szöge, hogy a lehető legtöbb fagyalt férjen a tölcseérbe?
138. Adott négyzet alakú fémlemezről fedél nélküli dobozt készítünk a sarkainak kivágásával. Mekkora négyzeteket vágjunk ki a lemezből?
139. Adott átfogójú derékszögű háromszögek közül melyiknek maximális a területe?
140. Hogyan számolható ki egy trapéz alapjainak segítségével a
- trapéz középvonala
 - trapézt két hasonló trapézra bontó, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza
 - a trapézt két egyenlő területű trapézra osztó szakasz hossza
 - a trapéz átlóinak metszéspontjára illeszkedő, az alapokkal párhuzamos szakasz hossza
141. Adott félkörbe írt téglalapok közül melyiknek van a legnagyobb területe?
142. Bizonyítsd be, hogy $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$, ha a , b és c pozitív valós számok!
143. Mennyi a $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-x}$ függvény legnagyobb értéke?
144. Bizonyítsd be, hogy bármely x ; y ; z pozitív valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:
- $$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz !$$
145. Bizonyítsd be, hogy bármely x és y pozitív valós számok esetén $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4 !$

146. Mennyi a $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+1}$ függvény legnagyobb értéke?

147. Bizonyítsd be, hogy bármely a ; b ; c pozitív valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$(a^2 + 1)(b + 1)(c + 1)(b + c) \geq 16abc$$

148. Bizonyítsd be, hogy ha a és b egy derékszögű háromszög befogói és m az átfogóhoz tartozó magasság, akkor:

$$m \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{ab}}{\sqrt{2}}$$

149. Bizonyítsd be, hogy ha a és b egy derékszögű háromszög befogói, c pedig az átfogója, akkor:

$$a + b \leq \sqrt{2}c. \text{ Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?}$$

150. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-7} + \sqrt{18-3x}$ függvény maximumát!

151. Bizonyítsd be, hogy minden olyan a és b pozitív valós számra, melyek összege 1, fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$152. \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{4}$$

Mely esetben áll fenn az egyenlőség?

153. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges pozitív természetes szám esetén: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

154. Legyenek a , b és c olyan pozitív valós számok, melyek összege 1. Mutassuk meg, hogy ekkor $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$!